

# Lo Scaffale di Babele

*Pensieri sfusi di una mente confusa*

Riccardo Giannitrapani

[riccardo.giannitrapani@gmail.com](mailto:riccardo.giannitrapani@gmail.com)

Questa versione è stata creata **venerdì 21 agosto 2026** e contiene 43 note. Come punto di partenza potete usare la nota [CampoBase](#).

Questo documento è distribuito con licenza CC-BY-NC .

*[...] la Biblioteca perdurerà: illuminata, solitaria, infinita,  
perfettamente immobile, armata di volumi preziosi, inutile,  
incorruttibile, segreta.*

— Jorge Luis Borges

## Lo Scaffale?

Jorge Luis Borges ne *La Biblioteca di Babele* [1] ha immaginato un labirinto di corridoi infiniti con infiniti testi casuali (che per ovvi motivi però si ripetono). Non potendo ambire a tanto, mi accontento di uno scaffale.

Raccolgo dunque in questo piccolo spazio note, appunti, vecchi post su blog ormai morti.

Uno strumento, dunque, che serve essenzialmente a me, ma che condivido volentieri per una minuscola probabilità che qualcosa qui dentro possa servire anche ad altre persone.

## Istruzioni

Questo documento contiene molte (troppe) cose in un ordine che è chiaro per me e assolutamente oscuro per chi non è me (parecchie persone non sono me). In generale non va letto in modo sequenziale

A meno che non sappiate già quale nota vi serva (le note sono identificate da un codice univoco, una sorta di titolo abbreviato), per orientarsi consiglio di partire dai seguenti sentieri che contengo link da seguire.

- [SaggiLettereBlogManifesti](#) Vecchi post, saggi, manifesti
- [GuerrigliaMatematica](#) Matematica fatta in strada
- [Problemi](#) Raccolta di problemi
- [SuggerimentiVisuali](#) Visualizzare la matematica (sivedeprof)
- [Bibliografia](#) Una raccolta di riferimenti a letture.

In [TavoloLavoro](#) mantengo un elenco più o meno aggiornato delle parti dello scaffale su cui sto lavorando.

ATTENZIONE. Questa versione è un work in progress, sto lentamente riportando qui dentro cose scritte in altri sistemi usati in passato. Per ora ci sono poche cose, poche spiegazioni, poca coerenza. Spero di rimediare con il tempo.

Il formato PDF in questo non aiuta essendo pensato per documenti di tipo sequenziale. Mi è comodo per altri aspetti.

domenica 16 agosto 2026 22:46

#hub

(Citata in [CampoBase](#))

---

Scritti, saggi brevi, lettere, manifesti comparsi sui miei vecchi blog.

- [ManifestoInsegnamentoMatematica](#)

Un manifesto scritto di getto parecchi anni fa sul mio modo di intendere l'insegnamento della matematica. A distanza di tempo alcune cose le scriverei diversamente, ma i concetti fondamentali ancora oggi mi guidano quotidianamente in classe.

- [ManifestoGuerrigliaMatematica](#)

Un tentativo di portare la matematica fuori dall'aula. Collegato a questo manifesto alcune azioni di matematica da strada raggruppate in [GuerrigliaMatematica](#).

- [OdografoHamilton](#)

Un interessante risultato di meccanica celeste: le orbite di un potenziale kepleriano nel piano delle velocità sono sempre circolari (o archi di circonferenza).

- [OdografoHamiltonSemplificato](#) Lo stesso risultato della nota precedente, ma ottenuto in forma semplificata senza usare derivate (circa).

- [LetteraIrrazionalita](#)

La dimostrazione dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$  in forma epistolare usando l'albero di Calkin-Wilf.

- [IrrazionalitaRadiceDue](#)

Ancora sull'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ , ma in una forma più sintetica e formale.

- [IrrazionalitaRadiceDueBis](#)

Una ulteriore variazione sull'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ .

- [TruccoMagiaPolinomiale](#)

Un piccolo trucco con cui stupire amici e parenti; indovinare un polinomio di grado qualsiasi da soli due valori.

- [EtInArcadiaEgo](#)

Un breve ricordo di Zeno Pycha, professore di matematica al Marinelli negli anni trenta del secolo scorso.

- [LetteraRazionaleResistenza](#) La costruzione dei razionali dell'albero di Calkin-Wilf tramite resistenze in serie e in parallelo.

---

## <Problemi>

lunedì 10 agosto 2026 00:58

#hub

(Citata in [CampoBase](#))

---

Raccolgo in questa silloge un po' di link a note che contengono problemi di matematica e fisica.

### I PROBLEMI DELLA SETTIMANA

- [ProblemiDellaSettimana](#)

### VARI

- [EquazioneComplessaPace](#)

### SENTIERI ESTIVI

Ecco alcune schede con problemi per il ritorno in classe per l'estate del 2026.

- [SentieriEstivi2026-2D](#)
- [SentieriEstivi2026-1G](#)

Care e cari, come promesso ecco una piccola scheda con argomenti e problemi a cui pensare in vista del prossimo anno scolastico. La seconda sarà un anno di consolidamento, ricco di spunti e di esplorazioni interessanti (spero) e richiede delle basi solide per poter lavorare con serenità. A un mese dall'inizio della scuola vi mando quindi i *panorami* (argomenti minimi su cui dovete sapervi orientare) e i *sentieri* (problemi che dovete saper affrontare, anche solo parzialmente). Ci tengo però ad alcune precisazioni.

1. Quel che segue non sono «compiti per le vacanze». Non assegno mai questo tipo di cose per motivi personali da molti anni. Il contenuto di questa nota va invece inteso come uno strumento che vi propongo per poter iniziare al meglio il prossimo anno.
2. Non ci sarà nessun controllo, decidete voi, in base alla vostra maturità, preparazione personale e propensione ad occuparvi di voi stessi e di voi stesse, se dare un'occhiata, fare tutto, leggere distrattamente, svolgere parzialmente o cestinare quanto segue. È una vostra scelta (e come tutte le scelte vi mette davanti a dubbi e conseguenze, come è giusto che sia).
3. Tutti i problemi proposti li vedremo in classe nei primi giorni di scuola. Ovviamente un conto è se li fate voi autonomamente e magari mi chiedete una mano appena ci ritroviamo in classe, un conto è subirli passivamente fatti da me alla lavagna. In ogni caso cercherò di non lasciare indietro dubbi.
4. I sentieri si concentrano su problemi di media difficoltà, non vi mando esercizi di puro calcolo. Confido che possiate anche in questo caso utilizzare la vostra autonomia: se volete fare qualche esercizio su un argomento specifico lo potete prendere tranquillamente dal vostro libro di testo, sono certo che saprete trovare (anche questa è una competenza necessaria) gli esercizi senza che ci sia bisogno che ve li indichi io. (Per esempio, volete rinforzarvi sulle equazioni di primo grado? Prendete il libro, cercate nell'indice «equazioni di primo grado» et voilà, troverete un sacco di esercizi su cui potrete formarvi le ossa.)
5. Durante l'anno trascorso insieme vi ho dato i testi di tutte le verifiche svolte in classe, sia quelle di prova che quelle reali. Per molte

ho anche fornito la soluzione tramite video. Saper risolvere quei problemi è un ottimo punto di partenza.

6. Come sapete cerco di considerare fisica e matematica come un'unica materia. Sia i panorami che i sentieri che seguono mantengono questo spirito che cercherò di rinforzare ulteriormente nei prossimi anni.
7. Personalmente non vedo l'ora di tornare in classe. So che non è così anche per voi, ma non importa, è normale.

---

## PANORAMI

*Cosa dovete saper riconoscere, ricordare, discutere? Per i dettagli potete far riferimento ai curricoli disciplinari sul sito del liceo, qui di seguito elenco il minimo indispensabile.*

I principali sistemi numerici. Numeri naturali, interi, razionali, reali. Rappresentazione in base binaria, esadecimale, generica. Albero di Calkin-Wilf per la rappresentazione di  $\mathbb{Q}$ . Divisibilità, numeri primi e scomposizione di un naturale in fattori primi. MCD e mcp. Alberi binari per la rappresentazione dei numeri binari. Triangolo di Pascal-Tartaglia e sue proprietà. Semplici somme infinite. Numeri triangolari. Potenze intere. Notazione scientifica. Rappresentazione di grandezze fisiche. Teoria degli errori e loro propagazione. Ordini di grandezza. Insiemistica e logica. Relazioni su un insieme. Relazioni di equivalenza e classi di equivalenza. Applicazioni tra due insiemi. Applicazioni biietive. Cardinalità degli insiemi finiti e infiniti. Insieme potenza. Numerabilità di un insieme. Vettori. Somma, sottrazione, scomposizione di vettori. Proiezione di un vettore tramite funzioni goniometriche. Seno e coseno e loro proprietà elementari. Vettori spostamento, vettori velocità. Espressioni algebriche, differenza tra variabili, incognite, parametri. Manipolazione elementare di espressioni algebriche. Esplicitazione di una variabile in una espressione algebrica. Monomi. Polinomi. Equazioni algebriche. Equazioni di primo grado. Scomposizione di un polinomio in fattori. Raccoglimento parziale e totale. Prodotti notevoli e loro interpretazione geometrica. Triangolo di Pascal-Tartaglia per le potenze di un binomio. Metodo di ruffini per la scomposizione di un polinomio in fattori di primo grado. Equazioni di grado superiore al primo scomponibili. Zeri di un polinomio. Espressioni algebriche fratte. Minimo comune multiplo. Campo di esistenza di una frazione. La statica. Definizione approssimativa di forza. Equilibrio vettoriale delle forze. Forza peso e accelerazione di gravità. Forza elastica, legge di Hooke. Forze di reazione vincolare. Tensioni in un filo. Attrito statico come particolare reazione vincolare. Coefficiente di attrito statico.

---

## SENTIERI

*Qui di seguito una raccolta minimale di problemi a cui potete pensare. Non sempre hanno soluzioni semplici, ma spesso basta avere l'idea giusta. Sono pensati per mettere in pratica le vostre conoscenze sia di fisica che di matematica. Non sono esaustivi, ma toccano vari argomenti che ritengo importanti per l'anno prossimo.*

*Per esercizi da palestra consiglio di prenderne un po' dal libro o dai compiti dell'anno scorso.*

Considera il triangolo di Tartaglia-Pascal. Sulla prima diagonale sinistra ci sono tutti 1. Sulla seconda tutti in naturali a partire da 1. Dimostra che sulla terza ci sono tutti i numeri triangolari. Esplora, anche con l'aiuto di un programma, i numeri sulla quarta e prova a determinare una relazione che dia l'ennesimo numero della sequenza.



Attenzione ai problemi Kobayashi-Maru

Sentiero 1

Considera un albero binario che parte come nodo radice da 1 e in cui ogni nodo con numero  $a$  ha due figli, il sinistro  $2a$  e il destro  $2a + 1$ . Dimostra che tale albero contiene tutti i numeri naturali a partire da 1. Dimostra che sulla diagonale sinistra si trovano le potenze di 2. Verifica che se mi fermo al livello  $n$  dell'albero, tutti i numeri contenuti in questo sottoalbero sono scrivibili come somma di potenze di 2. Determina un legame tra questo fatto e la rappresentazione di  $\mathbb{N}$  con la base 2.



Sentiero 2

Come esempio di albero binario pensa a Calkin-Wilf

Un corpo di massa 200 g si trova appoggiato sul piano al centro di un pentagono regolare di lato 1 m. Il corpo è attaccato a 4 vertici del pentagono tramite delle molle di coefficiente elastico  $k$  pari a 100 N/m e lunghezza a riposo 20 cm. Determina la forza (direzione, verso e modulo) che devi esercitare sul corpo per tenerlo in equilibrio. Come cambia la risposta se tra il corpo e il piano c'è una forza di attrito statico con coefficiente di attrito statico pari a 0.3?



Sentiero 3

Dato un polinomio  $p(x)$ , come faccio a capire se è divisibile per il polinomio  $x^2 - 1$  senza fare divisioni tra polinomi? Per esempio,  $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$  lo è?



Sentiero 4

Il quinto postulato di Peano per  $\mathbb{N}$  (postulato di induzione) può essere rappresentato usando la notazione della logica: se  $P(n)$  è una proprietà del numero  $n \in \mathbb{N}$ , allora

Sentiero 5

$$((P(0) \wedge \forall n(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow \forall n P(n))$$

Prova a parafrasare in italiano tale postulato. Prova quindi ad utilizzarlo per dimostrare che la somma dei primi  $n$  numeri naturali è  $n(n+1)/2$ .



Su un piano inclinato con un angolo di  $30^\circ$  rispetto all'orizzonte si trova un corpo di massa  $m$  tenuto in equilibrio dalla forza di attrito. Se provi ad inclinare maggiormente il piano, anche con un piccolissimo angolo aggiuntivo, l'equilibrio si rompe. Determina il coefficiente di attrito statico tra il corpo e il piano.

Sentiero 6



Considera i numeri sull'albero di Calkin-Wilf. Immagina di interpretarli come vettori sul piano: il numeratore è la componente  $x$ , il denominatore la componente  $y$ . Dimostra che la somma dei vettori di qualsiasi riga dell'albero è un vettore inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'asse  $x$ .

Sentiero 7



Un pentagono ha un lato pari a  $(10.0 \pm 0.1)$  cm. Esiste un percorso che partendo da un vertice passi attraverso tutti i lati e tutte le diagonali una e una sola volta? Se sì, quanto è lungo tale percorso (specifica anche l'errore assoluto).

Sentiero 8



Risolvi, se possibile, la seguente equazione (pensa bene prima di provare a fare calcoli)

Sentiero 9

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 1$$



Trova un polinomio che abbia i primi 4 numeri triangolari come zeri. Rappresentalo in forma esplicita (non fattorizzata).

Sentiero 10



Risolvi le seguenti equazioni (h/t I.M.Gelfand)

Sentiero 11

$$x^4 + 5x - 6 = 0 \quad x^4 + 3x^2 + 5x + 1 = 0$$



Chiedi ad un amico o ad una amica di pensare, senza dirtelo, ad un polinomio  $p(x)$  di grado qualsiasi, che soddisfi le seguenti condizioni:

1. i coefficienti siano tutti interi non negativi
2. non sia un monomio.

Tra lo stupore generale del pubblico sarai in grado di determinare in modo univoco ed esatto il polinomio pensato chiedendo soltanto due valori particolari; questa cosa sembra impossibile, un polinomio di grado  $n$  può avere fino a  $n + 1$  coefficienti, come è possibile determinarli tutti con soli due valori del polinomio? Fai colpo su tutti e tutte chiedendo i due seguenti valori:  $p(1)$  e  $p(p(1))$ . Il trucco a questo punto è semplice: esprimi il numero  $p(p(1))$  (che per le condizioni del gioco sarà un numero intero e positivo) in base  $p(1)$  e il gioco è fatto, i coefficienti nello sviluppo delle potenze di  $p(1)$  sono esattamente i coefficienti del polinomio da indovinare.

Spiega perché succede.

venerdì 7 agosto 2026 23:38

(Citata in [Problemi](#) | [TavoloLavoro](#))

---

Care e cari, come promesso ecco una piccola scheda con argomenti e problemi a cui pensare in vista del prossimo anno scolastico. La terza sarà un anno impegnativo ma ricco di spunti e di esplorazioni interessanti (spero) e richiede delle basi solide per poter lavorare con serenità. A un mese dall'inizio della scuola vi mando quindi i *panorami* (argomenti minimi su cui dovete sapervi orientare) e i *sentieri* (problemi che dovete saper affrontare, anche solo parzialmente). Ci tengo però ad alcune precisazioni.

1. Quel che segue non sono «compiti per le vacanze». Non assegno mai questo tipo di cose per motivi personali da molti anni. Il contenuto di questa nota va invece inteso come uno strumento che vi propongo per poter iniziare al meglio il prossimo anno.
2. Non ci sarà nessun controllo, decidete voi, in base alla vostra maturità, preparazione personale e propensione ad occuparvi di voi stessi e di voi stesse, se dare un'occhiata, fare tutto, leggere distrattamente, svolgere parzialmente o cestinare quanto segue. È una vostra scelta (e come tutte le scelte vi mette davanti a dubbi e conseguenze, come è giusto che sia).
3. Tutti i problemi proposti li vedremo in classe nei primi giorni di scuola. Ovviamente un conto è se li fate voi autonomamente e magari mi chiedete una mano appena ci ritroviamo in classe, un conto è subirli passivamente fatti da me alla lavagna. In ogni caso cercherò di non lasciare indietro dubbi.
4. I sentieri si concentrano su problemi di media difficoltà, non vi mando esercizi di puro calcolo. Confido che possiate anche in questo caso utilizzare la vostra autonomia: se volete fare qualche esercizio su un argomento specifico lo potete prendere tranquillamente dal vostro libro di testo, sono certo che saprete trovare (anche questa è una competenza necessaria) gli esercizi senza che ci sia bisogno che ve li indichi io. (Per esempio, volete rinforzarvi sulle equazioni di secondo grado? Prendete il libro, cercate nell'indice «equazioni di secondo grado» et voilà, troverete un sacco di esercizi su cui potrete formarvi le ossa.)
5. Durante l'anno trascorso insieme vi ho dato i testi di tutte le verifiche svolte in classe, sia quelle di prova che quelle reali. Per molte

ho anche fornito la soluzione tramite video. Saper risolvere quei problemi è un ottimo punto di partenza.

6. Come sapete cerco di considerare fisica e matematica come un'unica materia. Sia i panorami che i sentieri che seguono mantengono questo spirito che cercherò di rinforzare ulteriormente nei prossimi anni.
7. Personalmente non vedo l'ora di tornare in classe. So che non è così anche per voi, ma non importa, è normale.

---

## PANORAMI

*Cosa dovete saper riconoscere, ricordare, discutere? Per i dettagli potete far riferimento ai curricula disciplinari sul sito del liceo, qui di seguito elenco il minimo indispensabile.*

Equazioni e disequazioni algebriche di primo e secondo grado, anche parametriche. Equazioni e disequazioni algebriche riconducibili al primo e secondo grado. Il piano cartesiano, elementi principali. Equazioni in due variabili e loro rappresentazione sul piano cartesiano. Rette e parabole, loro caratteristiche e loro utilizzo per la soluzione di problemi algebrici. Intersezioni tra curve nel piano cartesiano. Sistemi di equazioni e disequazioni. Cinematica del punto materiale. Definizioni di traiettoria, velocità, accelerazione. Moti rettilinei uniformi e uniformemente accelerati. Leggi orarie e loro rappresentazione sul piano spaziotemporale. Moti nel piano. Moto parabolico di un corpo soggetto ad accelerazione costante in una direzione. Caratteristiche principali del moto parabolico e sua rappresentazione algebrica e geometrica. Radicali e loro proprietà. Equazioni e disequazioni razionali (fratte) e irrazionali. Quadrilateri, poligoni e loro principali proprietà. Inscrivibilità e circoscrivibilità in una circonferenza. Proprietà angolari della circonferenza. Rette tangenti alla circonferenza. Archi, corde. Angoli in radianti. Cinematica rotazionale, velocità angolare e tangenziale. Moto circolare uniforme, periodo, frequenza e principali relazioni. Leggi della dinamica. Sistemi di riferimento inerziali. Forza ed accelerazione. Forza e accelerazione centripeta. Riferimenti non inerziali. Introduzione al concetto di energia cinetica e di lavoro.

---

## SENTIERI

*Qui di seguito una raccolta minimale di problemi a cui potete pensare. Non sempre hanno soluzioni semplici, ma spesso basta avere l'idea giusta. Sono pensati per mettere in pratica le vostre conoscenze sia di fisica che di matematica. Non sono esaustivi, ma toccano vari argomenti che ritengo importanti per l'anno prossimo.*

Attenzione ai problemi Kobayashi-Marui

*Per esercizi da palestra consiglio di prenderne un po' dal libro o dai compiti dell'anno scorso.*

Alice e Bob si muovono lungo una retta andando in versi opposti partendo da una distanza iniziale pari a  $D$ . Alice si muove di moto rettilineo uniforme con velocità  $v$  mentre Bob si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato partendo da fermo e con accelerazione  $a$ . Determina in funzione di questi parametri ( $D$ ,  $v$  e  $a$ ) il tempo impiegato a incontrarsi e il punto in cui avviene l'incontro. Rappresenta inoltre i due moti sul piano spaziotemporale e interpreta i risultati ottenuti da un punto di vista geometrico. Alice e Bob si incontrano sempre? Cerca di delineare delle condizioni (se esistono) affinché possano non incontrarsi mai.

Sentiero 1



Un oggetto viene lanciato con velocità iniziale  $v$  e angolo di alzo  $\theta$  rispetto al terreno. Trova la gittata, l'altezza massima e il tempo di volo in funzione di  $v$  e  $\theta$ . Dimostra che il modulo della velocità in ogni istante della traiettoria dipende solo dall'altezza raggiunta in quel momento. Usa questo fatto per dimostrare che l'energia cinetica iniziale è uguale all'energia cinetica nel momento dell'impatto con il terreno. L'energia cinetica nel punto più alto della traiettoria è invece più bassa dell'energia cinetica di partenza. Dimostra che la differenza tra le due è pari a  $mgh$  dove  $h$  è l'altezza massima raggiunta. Qual è il valore minimo del modulo della velocità durante tutto il volo?

Sentiero 2



Dimostra che data la famiglia di parabole che passano per l'origine e che hanno  $a = -1$ , i loro vertici si dispongono su una parabola.

Sentiero 3



Data una circonferenza, trova il rapporto tra l'area del quadrato inscritto e l'area del quadrato circoscritto. Prova a generalizzare a un poligono regolare con  $n$  lati.

Sentiero 4



Immagina un cerchio di raggio  $r$  al cui interno rotola senza strisciare un cerchio di raggio  $r/2$ . Dimostra che ogni punto del cerchio piccolo si muove su un diametro del cerchio grande. Utilizza questo risultato per studiare il moto del punto medio di una scala che scivola appoggiata ad una parete.

Sentiero 5



Nello spazio profondo un cilindro di raggio  $R$  ruota intorno al proprio asse con un periodo pari a  $T$ . Un astronauta si trova sulla superficie

Sentiero 6

interna del cilindro e sente una sorta di forza gravitazionale che lo spinge verso tale superficie. Perché? Quanto deve valere  $T$  (in funzione di  $R$ ) affinché l'astronauta possa far finta di essere immobile sulla superficie terrestre? Se l'altezza dell'astronauta è  $h$ , determina la differenza di accelerazione tra la testa e i piedi dell'astronauta.



Trascurando l'attrito dell'aria, determina l'ordine di grandezza dell'energia cinetica di una goccia di pioggia quando arriva a terra (stima le grandezze che servono per rispondere). Sapendo che un pallino di piombo sparato da una pistola ad aria compressa ha un'energia cinetica di circa  $4\text{ J}$ , ritieni plausibile trascurare l'attrito dell'aria nello studio di caduta della pioggia? Argomenta.

Sentiero 7



Una pallina viene lanciata con velocità pari a  $100\text{ m/s}$  ed un angolo di  $60^\circ$  rispetto al terreno. Ogni volta che colpisce il terreno la componente verticale della velocità diminuisce del  $20\%$  mentre quella orizzontale rimane invariata. Studia dettagliatamente il moto nei primi tre rimbalzi disegnando la traiettoria e determinando la distanza totale percorsa e il tempo necessario. Trova inoltre una relazione che dia la velocità con cui la pallina colpisce il terreno dopo  $n$  rimbalzi. Quanto deve essere  $n$  affinché scenda sotto i  $55\text{ m/s}$ ?

Sentiero 8



Alice si muove in linea retta con la sua bicicletta. Le ruote hanno un diametro di circa  $60\text{ cm}$  e ruotano con una frequenza di circa  $2\text{ Hz}$ . Quanto tempo impiega a fare  $1\text{ km}$ ?

Sentiero 9



Stima la velocità media a mezzogiorno dell'ombra della punta di un bastone lungo  $1\text{ m}$  piantato perpendicolarmente nel terreno all'equatore.

Sentiero 10



Un rettangolo ha la proprietà che se ritagliato lungo la direzione del lato corto in modo da ottenere un quadrato, la parte restante è un rettangolo simile (stesso rapporto tra lati) di quello di partenza. Determina il rapporto tra lato lungo e lato corto di tale rettangolo. Dimostra che se da tale numero togli  $1$ , ottieni il suo reciproco. Quanti sono i numeri che godono di questa proprietà?

Sentiero 11



Data la parabola di equazione  $y = 2(x - x^2)$ , prendi un valore della  $x$  qualsiasi compreso tra 0 e 1 (esclusi) e calcola la  $y$ . Quindi prendi tale valore e usalo come nuova  $x$ , trovando una nuova  $y$ . Vai avanti con tale procedura. Cosa noti? Dai una giustificazione geometrica di quello che hai notato. Cosa cambia se usi la parabola  $y = 3.6(x - x^2)$ ?

**Sentiero 12**

---

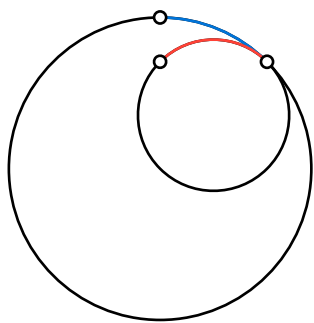
<stdm>

venerdì 7 agosto 2026 11:36

(Citata in [TavoloLavoro](#))

---

Prova



Alla fine credo di aver bisogno di sole quattro tipologie di note.

1. Note normali (atomiche o meno): sono l'elemento portante, non hanno bisogno di particolari identificatori. Se una nota è atomica o un post del blog o un compito in classe lo si capisce in parte dal titolo e in parte dal contesto. Inoltre le note hub servono proprio a dare contesto al posto dei tag
2. Note hub: queste sono la struttura portante che collega tutte le note tra loro. Potrei usare l'underscore per evidenziarle.
3. Note fleeting: sono note veloci, non ancora strutturate. Userei un id esadecimale così sono facilmente riconoscibili
4. Note private: non sono sicuro di volerle, ma potrei usare un - nel titolo per identificarle ed evitare che vengano esportate fuori dal flusso

Sugli attriti di un sistema di note.

Dopo anni passati ad usare più o meno qualsiasi sistema esistenze per scrivere, conservare e condividere note, approdo tentativamente a questo obtf scritto in Typst.

La ratio di questo sistema di note risiede nel fatto che ci sono alcune cose che mi bloccano nello scrivere.

1. Dove metto una nota? In che punto? Con un flusso continuo e non ordinato, la metto dove capita, sempre, senza preoccuparmi di fare una scelta, niente attrito.
2. Come chiamo una nota? Se è una nota specifica (un saggio, un compito, una lettera) so come chiamarla. Ma alle volte ho un esercizio, un'idea, qualcosa da scrivere e non mi viene il titolo. Qui le note hanno come titolo la data (e l'ora) in cui sono state concepite. Nessuna scelta, nessun attrito.
3. Che identificativo uso per le note? Il folgezettel non ha funzionato, l'id con la data è complicato da ricordare. Ho quindi deciso di invertire titolo e id. Il titolo, come ho detto, è la data. L'id della nota è un titolo abbreviato in PascalCase se ho già in mente di cosa parla la nota, altrimenti è un numero casuale a 4 cifre (in base 36), molto semplice e facilmente ricercabile e memorizzabile. Quando la nota ha raggiunto una certa maturità diventa naturale scegliere un identificativo esplicito. In questo modo il sistema gestisce automaticamente le fleeting note (note buttate di getto con id casuale) e le permanent note (note ormai mature per entrare di diritto nel sistema stabile).

---

## <StudenteIndeciso>

giovedì 26 marzo 2026 23:09

(Citata in [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Immagina uno studente che deve scegliere se andare a scuola o al parco. Schematizza la scuola e il parco come due punti sul piano,  $S$  e  $P$ , e la posizione di partenza dello studente come un ulteriore punto che non giace sulla retta contenente  $SP$ . Lo studente inizia a muoversi verso  $S$ , ma a metà strada si ferma, cambia idea e inizia a muoversi verso  $P$ . Ma nuovamente, a metà strada, si ferma e torna a muoversi verso  $S$ . E così via. Ogni volta che prende una decisione si muove in direzione della meta ma a metà strada cambia idea.

Discuti la traiettoria dello studente e determina dove si troverà dopo molto tempo.

(Problema tratto, in modo semplificato, da [2])

---

## <ParabolaSicurezza>

giovedì 19 marzo 2026 23:48

(Citata in [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Lancia un oggetto dal terreno con velocità fissata  $v_0$  e angolo variabile. Definiamo *zona di sicurezza* l'insieme dei punti del piano che contiene la traiettoria che **non** possono essere raggiunti dall'oggetto. Dimostra che tale regione del piano è delimitata da una parabola (che dipende da  $v_0$  e da  $g$ ).

---

## <PentagoniRicorsivi>

giovedì 19 marzo 2026 23:37

(Citata in [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Dato un pentagono regolare, se tracci tutte le diagonali si formerà al suo interno un pentagono regolare più piccolo. Scegli a caso un punto all'interno del pentagono grande. Qual è la probabilità che tale punto sia dentro il pentagono piccolo?

---

## <TunnelSmistamenti>

giovedì 19 marzo 2026 23:26

(Citata in [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Sia dato un sistema di gallerie in cui si muove una folla. Sia  $f$  il flusso (numero di persone al minuto) di persone che entra dall'ingresso principale di queste gallerie. Il sistema prevede biforcazioni (una galleria si divide in due) e confluenze (una galleria confluisce in un'altra galleria, ma sempre nello stesso verso di marcia). C'è un solo ingresso al sistema di tunnel, ma possono esserci anche più uscite. Le regole sono semplici:

1. se una galleria si biforca, metà persone vanno da una parte e metà dall'altra.
2. Se una galleria confluisce in un'altra galleria, i flussi si sommano.

È possibile costruire un sistema di gallerie di questo tipo che abbia in una delle uscite un flusso pari a un terzo di quello in entrata?

Problema preso da [3].

---

## <DerivataFunzioniGoniometriche>

mercoledì 18 marzo 2026 22:51

(Citata in [SuggerimentiVisuali](#) | [OdografoHamiltonSemplificato](#))

---

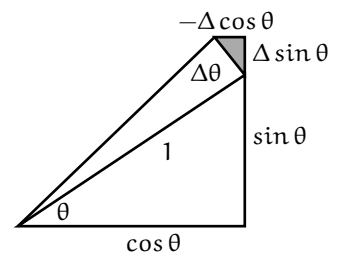
Visualizzando la figura di lato è abbastanza facile immaginare che una piccola variazione dell'angolo  $\theta$  renda il triangolo grigio, approssimativamente rettangolo, simile al triangolo di partenza. Si ottengono in questo modo le seguenti proporzioni:

$$\frac{\Delta \sin \theta}{\Delta \theta} = \frac{\cos \theta}{1}$$

$$\frac{\Delta \cos \theta}{\Delta \theta} = -\frac{\sin \theta}{1}$$

Tali relazioni rappresentano una versione semplificata e discreta delle derivate di sin e cos

Anche questo risultato è essenzialmente ispirato a [4] e l'ho usato in [OdografoHamiltonSemplificato](#).



---

## <ParallelismoPerpendicolaritaNumeriComplessi>

martedì 17 marzo 2026 23:09

(Citata in [ProprietaAureaArcotangente](#))

---

«Parallelismo e perpendicolarità con i numeri complessi»

Nel piano complesso due numeri  $z$  e  $w$  sono rappresentati come vettori paralleli (cioè hanno lo stesso argomento modulo  $2\pi$ ) se

$$z\overline{w} \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\Im(z\overline{w}) = 0$$

Infatti per essere paralleli deve esistere un  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $z = kw$ . Moltiplichiamo per  $\overline{w}$  e otteniamo  $z\overline{w} = k|w|^2$ . A destra abbiamo un numero reale.

Similmente, due numeri saranno rappresentati come vettori perpendicolari (cioè una differenza  $\frac{\pi}{2}$  tra argomenti modulo  $2\pi$ ) se  $z\overline{w}$  è immaginario o, in altre parole, se

$$\Re(z\overline{w}) = 0$$

Tale risultato è immediato ricordando che per ruotare di  $\frac{\pi}{2}$  basta moltiplicare un numero per  $i$ .

## <DuplicazioneCosenoVisuale>

**martedì 17 marzo 2026 21:54**

(Citata in [AreaMassimaParticolareTriangolo](#) | [DuplicazioneSenoVisuale](#) | [SuggestioniVisuali](#))

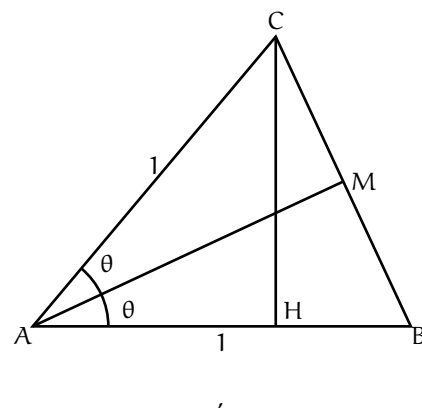
In modo del tutto analogo a [DuplicazioneCoseno](#) è immediato verificare che, data la figura a fianco, vale la seguente relazione

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

o, in modo del tutto equivalente

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

Infatti notiamo che  $\overline{CB}$  è  $2 \sin \theta$  e quindi  $\overline{HB}$  è  $2 \sin^2 \theta$ ; visto che  $\overline{AH} = 1 - \overline{HB}$ , si ottiene subito la prima relazione. Le altre due si ottengono ricordando semplicemente che la somma dei quadrati di  $\sin$  e  $\cos$  è sempre 1.



---

## <AreaMassimaParticolareTriangolo>

lunedì 16 marzo 2026 21:04

(Citata in [GittataMassimaMotoParabolico](#) | [SuggerimentiVisuali](#))

---

Si ottiene facilmente il seguente risultato elementare: i triangoli isosceli di area massima sono quelli rettangoli. Infatti dalla figura in [DuplicazioneCosenoVisuale](#) è evidente che l'area del triangolo è massima quando  $H$  coincide con  $A$ . Come conseguenza interessante si ha che l'area del rettangolo inscritto in una circonferenza è massima quando è un quadrato.

---

## <GittataMassimaMotoParabolico>

lunedì 16 marzo 2026 20:46

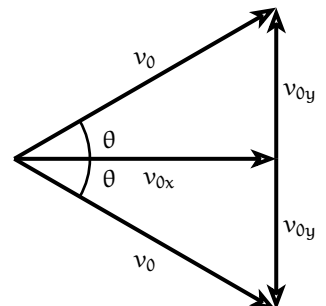
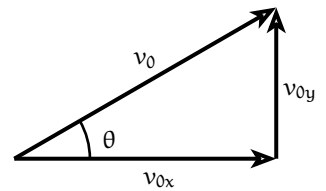
(Citata in [DuplicazioneSenoVisuale](#) | [SuggerimentiVisuali](#))

---

È possibile dimostrare facilmente per via visuale che la gittata massima in un moto parabolico con velocità iniziale fissata si ottiene con angolo di alzo rispetto al terreno di  $\pi/4$ . Si può facilmente vedere in termini di funzioni goniometriche (vedi [DuplicazioneSenoVisuale](#)), ma qui voglio mostrare una via equivalente senza usare seni o coseni e usando invece il risultato in [AreaMassimaParticolareTriangolo](#). Sia dato infatti il triangolo formato dalla velocità iniziale  $v_0$  e dalle sue componenti  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  come in figura. È noto che la gittata di un moto parabolico soggetto alla sola accelerazione gravitazionale  $g$  è data da

$$G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

La gittata è dunque proporzionale all'area del triangolo considerato. Se duplichiamo tale triangolo rispetto alla base ottenendo un triangolo isoscele (vedi figura) la gittata è ancora proporzionale alla nuova area e quindi sarà massima quando è massima tale area. Ma l'area di un triangolo isoscele è massima quando è rettangolo (vedi [AreaMassimaParticolareTriangolo](#)) da cui  $\theta = \pi/4$ . Questo tipo di visualizzazione è particolarmente utile, per esempio, in classi iniziali dove non si hanno ancora strumenti avanzati di goniometria (formule di duplicazione) e nemmeno strumenti dell'analisi per risolvere problemi di massimo.



---

## <DuplicazioneSenoVisuale>

domenica 15 marzo 2026 23:55

(Citata in [GittataMassimaMotoParabolico](#) | [SuggerimentiVisuali](#))

---

La suggestione visuale per la relazione di duplicazione del seno viene da un problema (vedi [DuplicazioneCoseno](#)) per una prima, dove non si hanno strumenti goniometrici a disposizione a parte qualche definizione elementare. In realtà per quel problema serve la relazione di duplicazione del coseno (vedi [DuplicazioneCosenoVisuale](#)), ma quella per il seno è ancora più semplice.

Facendo riferimento alla figura che rappresenta un triangolo isoscele in [DuplicazioneCosenoVisuale](#), si vede subito che

$$\overline{AM} = \cos \theta \quad \overline{BC} = 2 \sin \theta \quad \overline{CH} = \sin 2\theta$$

Considerando che l'area del triangolo può essere calcolata in due modi diversi:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{AM}}{2}$$

si ottiene immediatamente la nota relazione di duplicazione del seno:

$$\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

Incidentalmente questo dimostra che il valore massimo di  $2 \cos \theta \sin \theta$  si ha per  $\theta = \pi/4$ , risultato interessante per lo studio elementare del moto parabolico in un campo gravitazionale (vedi [GittataMassimaMotoParabolico](#)).

Ovviamente tale dimostrazione vale solo per  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , ma è facile estenderla al caso generale.

---

## <DuplicazioneCoseno>

giovedì 12 marzo 2026 22:33

(Citata in [DuplicazioneCosenoVisuale](#) | [DuplicazioneSenoVisuale](#) | [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Dimostra per via geometrica che vale la seguente relazione:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

(Suggerimento: lavora su un triangolo isoscele con angolo al vertice  $2\theta$  e lati congruenti di lunghezza 1).

Il problema è pensato per una prima dove le funzioni goniometriche elementari sono definite tramite un triangolo rettangolo e non si hanno a disposizione ulteriori strumenti goniometrici.

---

## <VarianteRandomWalk>

giovedì 12 marzo 2026 22:11

(Citata in [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Si immagini su una retta infinita un punto che si sposta a intervalli regolari con passi di 1 metro o verso destra o verso sinistra con uguale probabilità iniziale. Ogni volta che fa un passo in una delle due direzioni, al passo successivo la probabilità per tale direzione dimezza. Si studi la distribuzione delle probabilità nei vari punti della retta dopo 6 passi. In particolare si determinino le posizioni più probabili e quelle meno probabili.

---

## <ProblemiDellaSettimana>

giovedì 12 marzo 2026 21:40

(Citata in [Problemi](#) | [TavoloLavoro](#))

---

Anni fa (quando la barba non era bianca) avevo cominciato a proporre in classe e sul mio vecchio blog alcuni problemi non semplici (ma nemmeno impossibili) per incentivare il lavoro autonomo e stimolare il gusto della scoperta. Poi, come sempre, l'attrito delle cose ha preso il sopravvento e non ho più portato avanti la cosa.

Per vari motivi ho deciso di riprovare sotto forma di *problemi della settimana*: problemi da sottoporre alle classi di varia natura e su argomenti sparsi lasciando una settimana (appunto) di tempo per trovare una soluzione.

Le regole per partecipare sono poche e semplici:

1. Ogni giovedì sera (finché riesco a mantenere l'impegno) invio via mail e pubblico qui sopra un problema. Il problema deve essere didatticamente interessante ed essere risolvibile con le competenze acquisite in classe, ma deve richiedere anche un lavoro di analisi, comprensione e ricerca ulteriore. Non deve essere per forza un problema complesso o astruso, ma deve far riflettere. Potrebbe anche essere un problema non risolvibile (Kobayashi-Maru); in tal caso verrà valutata la discussione e la capacità di affrontare il fallimento. Se il problema non è originale (cioè non l'ho formulato io), devono essere dati gli estremi bibliografici della fonte.
2. Studentesse e studenti hanno una settimana di tempo per proporre in forma scritta (comprensibile) una possibile soluzione, utilizzando ogni strumento che ritengano utile (libri, appunti, la rete, software, linguaggi di programmazione, fogli di calcolo, zii e zie, il fato etc.). È possibile lavorare da soli o in gruppo. È bene specificare che i problemi proposti non sono particolarmente lunghi, la settimana di tempo tiene conto delle tante attività di studenti e studentesse e della necessità di trovare un momento sereno per riflettere e scrivere una possibile soluzione interessante.
3. I problemi sono generici, non necessariamente pensati per una classe particolare. Se possibile possono essere affrontati a vari livelli e con vari gradi di approfondimento in modo da poter coinvolgere anche classi diverse.
4. Alla scadenza le proposte saranno valutate (in modo insindacabile) sulla base della loro correttezza, eleganza, semplicità, inventiva, originalità etc.

5. Potrò chiedere spiegazioni e dettagli in modo da garantire la comprensione effettiva di quanto consegnato.
6. Verrà annunciata in classe la soluzione più interessante che verrà appesa in una parte della classe per i posteri. Se per una settimana non dovesse esserci nessuna soluzione proposta (o nessuna proposta ritenuta valida), verrà lasciato uno spazio vuoto sulla parete e il problema verrà discusso in classe collettivamente.
7. Punto più importante: tale attività **non determina alcun voto**, chi partecipa lo fa per interesse e gusto della ricerca (ed eventualmente per la gloria imperitura).

Spero che questa proposta possa durare nel tempo dando la possibilità a studentesse e studenti di trovare, discutere e immaginare problemi interessanti su cui confrontarsi.

Buon lavoro.

**DuplicazioneCoseno** un problema di goniometria senza la goniometria

**TunnelSmistamenti** un problema di flusso di persone in un particolare sistema di tunnel

**ProblemaMotoParabolico** un interessante problema sul moto parabolico, affrontato per via elementare.

**ParabolaSicurezza** trovare i punti che non possono essere colpiti in un particolare moto parabolico.

**VarianteRandomWalk** cosa succede se nel random walk la probabilità cambia a seconda del passo precedente?

**PentagoniRicorsivi** la probabilità di colpire una possibile configurazione ricorsiva di pentagoni.

**StudenteIndeciso** dove porterà la traiettoria di uno studente particolarmente indeciso?

Essendo io frangibile (come tutti) i problemi proposti potrebbero contenere errori, imprecisioni o ambiguità. Sarò grato a chiunque voglia segnalarmi sbavature di qualsiasi natura.

---

## <ProblemaMotoParabolico>

giovedì 12 marzo 2026 21:15

(Citata in [ProblemiDellaSettimana](#))

---

Consideriamo un corpo lanciato da terra con una velocità iniziale  $v_0$  ed un angolo rispetto all'orizzonte  $\theta$ . È noto che la traiettoria di tale corpo soggetto alla sola accelerazione gravitazionale è un arco di parabola.

Durante il volo la distanza  $D$  tra il corpo e il punto di partenza varia nel tempo. È facile immaginare una situazione in cui tale distanza cresce sempre nel tempo, per esempio con un angolo molto prossimo a 0. Ma è altrettanto facile immaginare una situazione in cui  $D$  inizialmente cresce per poi decrescere; per esempio (caso limite) con un angolo iniziale di  $\pi/2$ .

Quale condizione deve soddisfare  $\theta$  affinché  $D$  cresca durante tutto il tempo di volo?

Problema tratto da [5].

Sebbene sia possibile risolvere il problema con strumenti dell'analisi (derivate, funzioni strettamente crescenti etc), c'è una elegante soluzione che richiede solo conoscenze minime di algebra e fisica.

---

## <DerivataFunzioneReciproca>

giovedì 19 febbraio 2026 22:53

(Citata in [SuggerimentiVisuali](#))

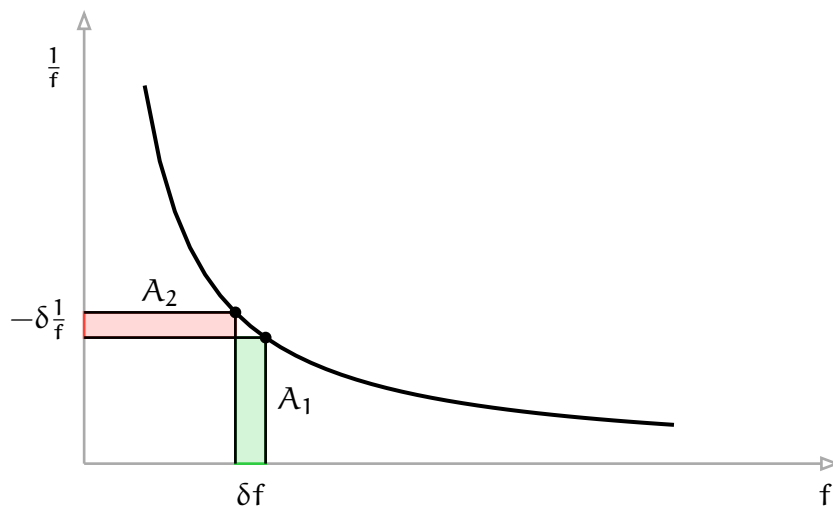
---

In [4] l'aspetto visuale (geometrico) e intuitivo assume un ruolo centrale, più di qualsiasi formalismo. L'idea non è nuova ed è ripresa da Newton stesso.

Come esempio ecco come fare la derivata di  $1/f(x)$  in modo non rigoroso ma non per questo meno efficace. Disegnando il grafico di  $\frac{1}{f}$  rispetto a  $f$  e ricordando che dato un punto del grafico, il rettangolo che si forma con gli assi coordinati ha area costante pari a 1, facciamo una piccola variazione. Si vede subito che

$$-\delta\left(\frac{1}{f}\right) \cdot f \asymp \delta f \cdot \frac{1}{f}$$

Da cui il risultato.



---

## <SuggestioniVisuali>

venerdì 2 gennaio 2026 01:17

#hub

(Citata in [CampoBase](#) | [TavoloLavoro](#))

---

Mi chiedo se dimostrazioni di tipo visuale siano vere dimostrazioni o possano essere considerate piuttosto delle **suggestioni**.

Da un punto di vista didattico, quando il rigore non è sempre necessario o non è il punto focale della lezione, suggeriscono in effetti vie efficaci per veicolare concetti altrimenti complessi (o noiosi). Probabilmente la cosa importante (e anche sufficiente) è sottolineare la natura spesso informale del ragionamento.

Raccolgo alcuni esempi

- [DerivataFunzioniGoniometriche](#)
- [DerivataFunzioneReciproca](#)
- [DimostrazioneMediePitagoriche](#)
- [AltraDimostrazioneMediePitagoriche](#)
- [DuplicazioneCosenoVisuale](#)
- [DuplicazioneSenoVisuale](#)
- [AreaMassimaParticolareTriangolo](#)
- [GittataMassimaMotoParabolico](#)

Uso il termine visuale e non geometrico in accordo con le idee di [4], ma è ovvio che in alcuni contesti sono sinonimi.

---

## <AltraDimostrazioneMediePitagoriche>

martedì 30 dicembre 2025 12:44

(Citata in [SuggerimentiVisuali](#))

---

In relazione alla dimostrazione in [DimostrazioneMediePitagoriche](#) e sempre presa da [6], ecco un'altra dimostrazione geometrica immediata che la media aritmetica tra due numeri è sempre maggiore o uguale della media geometrica (l'uguaglianza solo se i due numeri coincidono). Basta guardare la figura che rappresenta un rettangolo di lati  $\sqrt{a}$  e  $\sqrt{b}$  tagliato dalla bisettrice del primo quadrante.

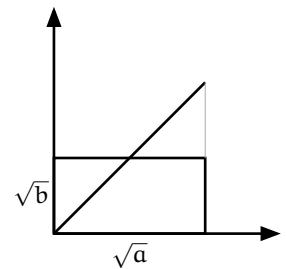
È evidente che la somma delle aree dei due triangoli rettangoli isosceli sia maggiore dell'area del rettangolo (o uguale se  $a = b$ ):

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{b}\sqrt{b}}{2} \geq \sqrt{a}\sqrt{b}$$

e quindi

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

■



---

## <DimostrazioneMediePitagoriche>

martedì 30 dicembre 2025 12:38

(Citata in [SuggerimentiVisuali](#) | [AltraDimostrazioneMediePitagoriche](#))

---

Ho trovato in [6] una dimostrazione visuale molto semplice del seguente fatto: la media geometrica tra due numeri è sempre minore o uguale della loro media aritmetica. La dimostrazione è immediata, basta guardare la figura qui a lato.

È evidente che l'area del quadrato è maggiore della somma delle aree dei quattro rettangoli, c'è un «buco» quadrato in mezzo. Il buco sparisce solo se  $a = b$ .

Da qui si vede che

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

e quindi

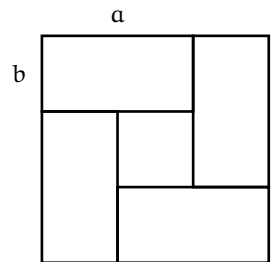
$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

■

L'uguaglianza vale solo se  $a = b$

Il lato del «buco» è  $(a - b)$ , da cui si ottiene anche

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$$



## <EquazioneComplessaPace>

**lunedì 3 novembre 2025 21:28**

(Citata in **Problemi** | **GuerrigliaMatematica**)

Risolvi l'equazione  $z^4 + i\sqrt{2}z^3 + i\sqrt{2}z - 1$  con  $z \in \mathbb{C}$  e rappresenta le soluzioni sul piano di Wessel-Argand-Gauss provando a commentare il risultato dal punto di vista algebrico e geometrico. In particolare sai discutere perché le soluzioni sono tutte fasi complesse?

*Soluzione*

Da un punto di vista algebrico possiamo provare a raccogliere alcuni termini e usare la nota relazione per la differenza di quadrati ottenendo

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) + i\sqrt{2}z(z^2 + 1) = 0$$

da cui, con un ulteriore raccoglimento, si ottiene

$$(z^2 + 1)(z^2 + i\sqrt{2}z - 1) = 0$$

Il primo fattore ha come soluzioni  $\pm i$ ; il secondo, risolto come una normale equazione di secondo grado, ha come soluzioni  $\frac{\pm\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ .

Riportando le soluzioni sul piano di Wessel-Argand-Gauss otteniamo il simbolo internazionale della pace. Notiamo che tutte e quattro le soluzioni appartengono alla circonferenza unitaria, cioè sono fasi complesse. Non è vero che le soluzioni sono a due a due complesse coniugate ed è normale che sia così in quanto i coefficienti del secondo fattore non sono tutti reali.

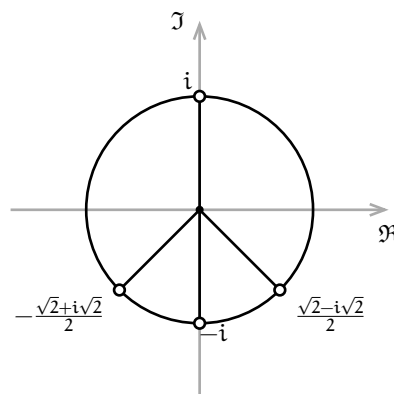
Si può però notare una certa simmetria. Gli angoli tra le tre soluzioni nel semipiano negativo immaginario formano angoli di  $\frac{\pi}{4}$ . Pensandoci bene le soluzioni sembrano essere, geometricamente, un sottoinsieme di un ottagono regolare e dunque soddisfano l'equazione  $z^8 - 1 = 0$ . Tale equazione si fattorizza facilmente in

$$(z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0$$

e quindi

$$(z^2 + 1)(z^2 - 1)(z^2 + i)(z^2 - i) = 0$$

Ricorda che per fasi intendo numeri complessi con modulo 1



Il fattore  $(z^2 + 1)$  è presente anche nella nostra equazione ed è quello che contiene  $\pm i$ . Le altre due soluzioni sono «nascoste» dentro gli ultimi due fattori. Infatti è abbastanza immediato verificare che

$$(z^2 + i\sqrt{2}z - 1)(z^2 - i\sqrt{2}z - 1) = (z^4 + 1)$$

In definitiva le quattro soluzioni che abbiamo trovato sono una selezione delle radici ottave dell'unità. E questo spiega perché siano tutte fasi complesse.

---

## <ModelloCosmologicoNewtoniano>

martedì 14 ottobre 2025 20:36

(Citata in [GuerrigliaMatematica](#))

---

È possibile cogliere alcuni aspetti dell'espansione dell'universo prevista dalla relatività generale usando un semplice modello newtoniano. Ovviamente essendo un modello coglie solo un particolare aspetto e non va minimamente inteso come un modello realistico del nostro universo.

Immaginiamo quindi una sfera omogenea di materia autogravitante secondo le leggi della meccanica classica newtoniana. Immaginiamo che gli elementi di materia che compongono la sfera abbiano una velocità puramente radiale. Considerando un tale elemento di massa  $m$  sulla superficie della sfera, la sua energia totale sarà classicamente

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r}$$

dove  $M$  è la massa totale della sfera e  $r$  il suo raggio. Aggiungiamo a questo punto un elemento al modello dovuto a Hubble; immaginiamo che la velocità  $v$  ad un certo istante sia verso l'esterno (sfera in espansione) e proporzionale alla distanza

$$v = Hr$$

dove  $H$  è una costante di proporzionalità che può essere ottenuta sperimentalmente. Essenzialmente dice che più a massa  $m$  è lontana, più la sua velocità è proporzionalmente alta. Utilizzando questa relazione e la definizione di densità per una sfera omogenea

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

otteniamo per l'energia totale

$$E = \frac{1}{2}mH^2r^2 - G\frac{4}{3}\pi\rho mr^2$$

Raccogliendo quindi un po' di fattori (tutti positivi), si ottiene

$$E = \frac{1}{2}mH^2 r^2 \left( 1 - \frac{8\pi G}{3H^2} \rho \right)$$

Definendo infine la *densità critica*  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ , otteniamo

Per il teorema di Newton-Gauss il discorso vale anche se prendiamo l'elemento di materia  $m$  all'interno della sfera.

$$E = \frac{1}{2}mH^2r^2\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)$$

Da qui si vede che abbiamo tre possibilità per l'evoluzione di questa sfera omogenea di materia autogravitante in espansione con una legge di Hubble

1.  $\rho < \rho_c$  l'energia di  $m$  è positiva, il sistema quindi non è legato gravitazionalmente e l'espansione proseguirà per sempre.
2.  $\rho = \rho_c$  l'energia di  $m$  è nulla, il sistema si fermerà, ma all'infinito.
3.  $\rho > \rho_c$  l'energia di  $m$  è negativa, il sistema è legato gravitazionalmente, l'espansione si fermerà e sarà seguita da un collasso verso l'interno.

Questo modello, per quanto semplificato e assolutamente non realistico, permette di discutere il destino evolutivo di questa sfera in espansione; se la densità supera un valore critico, sarà inevitabile una inversione e un successivo collasso della sfera a causa dell'elevata gravità. I tre possibili destini della sfera (espansione infinita, espansione che si ferma ma all'infinito, espansione che si ferma e collasso) corrispondono al modello cosmologico standard della relatività generale (soluzione di Robertson-Walker delle equazioni di Einstein, vedi [7]) dove l'universo (non newtoniano) ha tre possibili geometrie corrispondenti alle tre semplici evoluzioni della sfera (newtoniana) discussa sopra.

Un aspetto interessante: nella soluzione cosmologica esatta delle equazioni di Einstein la densità critica  $\rho_c$  che determina la natura dell'evoluzione dell'universo (espansione infinita o espansione finita seguita da collasso, il famoso *big crunch*) è identica a quella che abbiamo ottenuto in questo modello.

Uno dei tanti problemi: questo modello prevede un universo finito con un centro.

«[...] verrà il giorno in cui tutte queste schermaglie e battaglie, queste rivolte, romperanno gli argini dell'autorità dell'Impero. E poi ce ne sarà una di troppo. Una sola spezzerà l'assedio. Rammentate questo. Ribellatevi.»

— Karis Nemik

Anni fa ho scritto un [ManifestoGuerrigliaMatematica](#). Ultimamente la scoperta di una lavagna abbandonata in strada mi ha fatto venir voglia di riprendere il discorso; periodicamente vado a riempire quello spazio pubblico (vedi anche [ProblemiLuogoPubblico](#), [CompitiLuoghiPubblici](#) e [LavorarePortaAperta](#) sulla natura pubblica dell'agire matematico) con qualche idea matematica. Deve essere qualcosa di breve e conciso da poter occupare una singola lavagna. Qui sotto l'elenco di queste azioni portate a termine fino ad ora.

- [ModelloCosmologicoNewtoniano](#)  
un semplice modello classico di espansione di una sfera di materia autogravitante utile per illustrare alcune questioni cosmologiche in modo semplice
- [EquazioneComplessaPace](#)  
una interessante equazione complessa le cui soluzioni sul piano di Vessel-Argand-Gauss si dispongono a formare un simbolo interessante
- [PolinomiCebycev](#)  
la costruzione di alcuni polinomi collegati al coseno di un angolo tramite i numeri complessi
- [ApprossimazioneRadiceQuadrata](#)  
un metodo semplice per approssimare il valore di una radice quadrata tramite una frazione continua
- [ProprietaAureaArcotangente](#)  
una semplice relazione tra un particolare valore dell'arcotangente e il numero aureo  $\varphi$

Sia  $f_\theta$  una fase complessa, ovvero  $f_\theta \in \mathbb{C}$  con  $|f_\theta| = 1$ . È facile dimostrare che nel piano complesso di Wessel-Argand-Gauss moltiplicare per  $f_\theta$  equivale a ruotare di un angolo  $\theta$ . Allora

$$f_\theta^n = f_{n\theta}$$

e quindi

$$f_\theta^{n+1} + f_\theta^{n-1} = f_\theta^n (f_\theta + f_{-\theta})$$

Per definizione di  $\cos \theta$  si ottiene  $f_\theta + f_{-\theta} = 2 \cos \theta$ .

In definitiva si ottiene

$$f_\theta^{n+1} = 2 \cos \theta f_\theta^n - f_\theta^{n-1}$$

Questa è una relazione ricorsiva. Se prendo la parte reale (per una fase è il coseno) ottengo:

$$\cos((n+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos((n-1)\theta)$$

Ecco i primi valori

$$\begin{aligned}\cos 0 &= 1 \\ \cos \theta &= \cos \theta \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ &\dots\end{aligned}$$

Si vede che  $\cos n\theta$  è un polinomio di grado  $n$  di  $\cos \theta$  definito in modo ricorsivo come

$$p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned}p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x \\ p_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ p_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\dots\end{aligned}$$

Questi sono i polinomi di Čebyšëv.

---

## <ApprossimazioneRadiceQuadrata>

sabato 6 settembre 2025 18:15

(Citata in [GuerrigliaMatematica](#))

---

È possibile calcolare in modo semplice un valore approssimato di una radice quadrata tramite una frazione continua. Sia  $x = n^2 + a$  con  $n \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\sqrt{x} = \sqrt{n^2 + a} = n + b$$

Per trovare  $b$ , eleviamo al quadrato ottenendo

$$n^2 + a = n^2 + b^2 + 2nb$$

da cui

$$b(b + 2n) = a$$

e quindi

$$b = \frac{a}{2n + b}$$

Possiamo prendere questa come una relazione ricorsiva per  $b$ . Mettendo tutti insieme otteniamo

$$\sqrt{x} = n + \frac{a}{2n + \frac{a}{2n + \frac{a}{2n + \dots}}}$$

Per ottenere un valore approssimato basterà fermarsi ad un livello finito di questa frazione continua infinita.

---

## <ProprietaAureaArcotangente>

lunedì 18 agosto 2025 18:22

(Citata in [GuerrigliaMatematica](#))

---

«Una proprietà aurea dell'arcotangente tramite i numeri complessi»

In [8] ho visto una costruzione geometrica che permette di dimostrare in modo visuale la seguente interessante proprietà dell'arcotangente:

$$\arctan(2) = 2 \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right)$$

dove  $\varphi$  è il rapporto aureo. Ho pensato di proporre in classe un esercizio per ottenere questa relazione tramite i numeri complessi.

In effetti la cosa è semplice. Sappiamo che l'argomento del numero  $1 + i2$  è proprio  $\arctan(2)$ . Cerchiamo allora un numero  $1 + ik$  tale che  $(1 + ik)^2$  e  $1 + i2$  abbiano lo stesso argomento; in questo modo

$$\arctan(2) = 2 \arctan(k)$$

Per una nota proprietà questo succede se  $(1 + ik)^2 \cdot \overline{(1 + i2)}$  è reale.

Questo implica  $k - 1 + k^2 = 0$  e dunque  $k = 1/\varphi$ .

Due numeri in  $\mathbb{C}$  hanno lo stesso argomento se visti come vettori sono paralleli [ParallelismoPerpendicolaritaNumeriComplessi](#)

---

## <OdografoHamiltonSemplificato>

giovedì 6 febbraio 2025 00:03

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#) | [DerivataFunzioniGoniometriche](#))

---

Quando la sera è tersa, osservo il cielo.  
Non finisco mai di stupirmi,  
tanti punti di vista ci sono lassù  
— Wislawa Szymborska

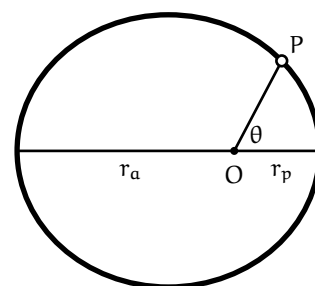
Nel corso di Astrofisica e Cosmologia che sto proponendo a ragazze e ragazzi del triennio del mio liceo mi trovo ad affrontare alcune questioni che ritengo importanti ma che a volte richiedono strumenti matematici che non sempre posso dare per scontato, soprattutto in classi eterogenee con studenti di anni diversi. La sfida didattica diventa dunque quella di poter parlare in modo concreto di aspetti importanti senza banalizzare e nello stesso tempo senza richiedere tecniche matematiche non disponibili realisticamente a tutti gli studenti e a tutte le studente. Questo tipo di lavoro richiede a volte di percorrere strade diverse da quelle tradizionali e ritengo questo sforzo utile didatticamente e culturalmente. Come esempio di questo tipo di problema riporto qui di seguito la deduzione semplificata di un risultato standard della meccanica celeste di cui ho già parlato in [OdografoHamilton](#): la traiettoria chiusa di un corpo soggetto ad una forza centrale gravitazionale è un cerchio nello spazio delle velocità. Dopo la dimostrazione discuterò alcune conseguenze interessanti da un punto di vista didattico.

Sia dunque P un oggetto in orbita ellittica kepleriana intorno al fuoco situato in O come in figura, con  $r_p$  e  $r_a$  le distanze al perielio e all'afelio.

Possiamo scrivere la prima legge della dinamica dove il segno meno è dovuto alla natura attrattiva della forza gravitazionale.

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$$

e scomporla lungo i due assi x e y:



Ovviamente servirebbe una derivata; questo è esattamente il tipo di strumento che non è disponibile in modo generale all'interno di una classe e quindi riformulo le equazioni dinamiche con le differenze finite.

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -GM \frac{m}{r^2} \cos \theta$$

$$m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -GM \frac{m}{r^2} \sin \theta$$

Moltiplichiamo e dividiamo la frazione a destra dell'uguale per la velocità angolare  $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$  ottenendo

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{GM\omega}{\omega r^2} \cos \theta$$

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{GM\omega}{\omega r^2} \sin \theta$$

Ricordando la definizione di momento angolare  $L = m\omega r^2$ , possiamo definire una nuova grandezza  $l$  come  $l = \omega r^2 = L/m$

Visto che per un moto dovuto ad una forza centrale il momento angolare si conserva lungo tutta la traiettoria, anche  $l$  rimane costante. Dalla definizione di velocità angolare possiamo inoltre scrivere:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -G \frac{M}{l} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cos \theta$$

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -G \frac{M}{l} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \sin \theta$$

Possiamo semplificare il  $\Delta t$  a destra e sinistra. Inoltre, con una semplice considerazione geometrica, è possibile riscrivere i termini che contengono le funzioni goniometriche in modo più semplice.

Consideriamo infatti un triangolo rettangolo di ipotenusa 1 e angolo  $\theta$  come in figura e immaginiamo di variare l'angolo  $\theta$  di una piccola quantità  $\Delta \theta$ . Si vede facilmente che quando  $\Delta \theta$  è "piccolo" il triangolo grigio è simile al triangolo di partenza. Dunque

$$\Delta \sin \theta = \Delta \theta \cos \theta \quad \Delta \cos \theta = -\Delta \theta \sin \theta$$

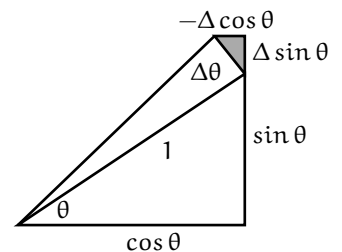
Tornando alle nostre equazioni del moto otteniamo quindi

$$\Delta v_x = -\frac{GM}{l} \Delta \sin \theta$$

$$\Delta v_y = \frac{GM}{l} \Delta \cos \theta$$

Portando tutto a sinistra e considerando un'unica variazione, si ottiene

Nuovamente questo passaggio diventa molto semplice avendo a disposizione le derivate; il ragionamento geometrico che qui riporto è a mio avviso più interessante e mette in luce la natura geometrica del processo di derivazione. Si veda per esempio [4]. Questa semplice dimostrazione l'ho estratta in una nota a parte, [Derivata Funzioni Goniometriche](#).



$$\Delta\left(v_x - \frac{GM}{l} \sin \theta\right) = 0$$

$$\Delta\left(v_y + \frac{GM}{l} \cos \theta\right) = 0$$

Ma se una grandezza ha variazione nulla vuol dire che è costante, e dunque

$$v_x - \frac{GM}{l} \sin \theta = k_x$$

$$v_y + \frac{GM}{l} \cos \theta = k_y$$

con  $k_x$  e  $k_y$  opportune costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Esplicitando quindi le funzioni goniometriche

$$\sin \theta = \frac{v_x - k_x}{\left(\frac{GM}{l}\right)}$$

$$\cos \theta = -\frac{v_y - k_y}{\left(\frac{GM}{l}\right)}$$

e usando la relazione  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , si ottiene l'equazione per le componenti della velocità:

$$(v_x - k_x)^2 + (v_y - k_y)^2 = \left(\frac{GM}{l}\right)^2$$

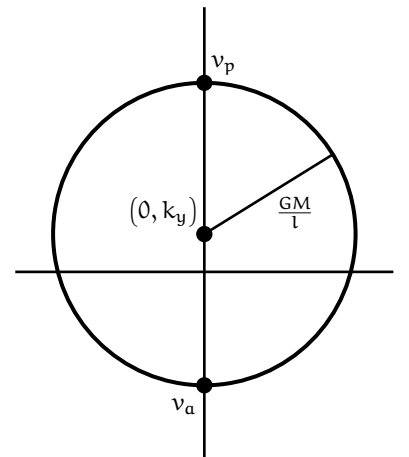
È immediato verificare quindi che nello spazio delle velocità questa equazione descrive una circonferenza centrata in  $(k_x, k_y)$  di raggio  $GM/l$ . Se consideriamo come in figura  $\theta = 0$  il perielio e indichiamo con  $v_p$  la velocità del corpo al perielio, dalle equazioni precedenti si ottiene  $k_x = 0$  e  $k_y = v_p - \frac{GM}{l}$ .

Per definizione di momento angolare si vede subito che  $l = v_p r_p = -v_a r_a$  e quindi

$$k_y = \frac{v_p^2 r_p - GM}{v_p r_p}$$

Abbiamo quindi ottenuto il seguente risultato notevole: nello spazio delle velocità l'orbita ellittica kepleriana è descritta da una circonferenza come in figura.

Si vede che le intersezioni della circonferenza con l'asse  $v_y$  rappresentano le velocità al perielio e all'afelio, velocità che si ottengono



a questo punto facilmente aggiungendo o togliendo il raggio  $GM/l$  dalla posizione del centro. Per esempio  $v_a$  è la velocità del corpo all'afelio e si vede subito che è data da

$$v_a = v_p - \frac{2GM}{l}$$

Vediamo infine alcuni casi particolari del risultato ottenuto di interesse didattico. Se il centro si trova nell'origine allora in modulo  $v_a$  e  $v_p$  coincidono; per la definizione di  $l$  allora anche  $r_a = r_b$  e l'orbita è una circonferenza e il modulo della velocità e la distanza di P da O sono costanti. Dalla relazione per  $k_y$  trovata sopra si vede che il centro si trova nell'origine se  $k_y = 0$  e quindi la velocità  $v$  è legata al raggio  $r$  (possiamo togliere tutti i pedici in quanto  $v$  e  $r$  sono costanti) dalla seguente relazione

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Questa è la nota relazione per la velocità orbitale di un'orbita circolare kepleriana.

Se invece  $v_p$  è pari al diametro dell'odografo,  $v_p = \frac{2GM}{l}$ , si vede subito che  $v_a = 0$ . Ma questo significa che  $r_a$  tende all'infinito (in un tempo infinito), cioè l'orbita ellittica degenera in una parabola con vertice nel perielio. Facendo i calcoli (esercizio) si trova la condizione su  $v_p$ :

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}}$$

e questa è la nota relazione per la velocità di fuga di un corpo a distanza  $r_p$ . È interessante notare che questa relazione è stata ottenuta per via geometrica dall'odografo (e non usando il concetto di energia potenziale gravitazionale) e il fattore 2 sotto la radice rispetto alla velocità orbitale di un'orbita circolare assume un significato geometrico ben preciso. Si noti inoltre che in questo caso la traiettoria del corpo non corrisponde all'intero odografo, ma solo a metà (semicirconferenza).

Lascio come esercizio lo studio del caso in cui la velocità  $v_p$  supera il limite di velocità di fuga appena trovato. In tal caso la circonferenza nello spazio delle velocità è interamente contenuta nel semipiano superiore. Non è difficile convincersi che l'orbita del corpo è una iperbole e che l'odografo sarà un arco di circonferenza; si può anche facilmente dimostrare che tale arco parte da  $(0, v_p)$ , che è il punto di intersezione superiore della circonferenza con l'asse  $v_y$ , e arriva (in un tempo infinito) al punto in cui la retta passante per l'origine è

tangente alla circonferenza. Infine potrebbe valere la pena studiare come esercizio personale anche il caso in cui  $v_p$  sia inferiore al raggio  $GM/l$  e quindi la circonferenza è centrata nel semipiano negativo. È abbastanza semplice determinare le orbite in questo caso e verificare che il caso limite in cui  $v_p$  tende a 0 non è, nelle condizioni poste dal problema, raggiungibile.

Per gli studenti e le studente di quinta costituisce inoltre un utile esercizio riformulare tutto il problema utilizzando le derivate invece delle differenze finite.

martedì 15 ottobre 2024 21:37

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#))

---

## LETTERA RAZIONALE SULLA RESISTENZA

Ho rinunciato alla pace interiore per rendere  
la mia mente un luogo pieno di ombre.

— Luthen Rale

Caro L

non so se leggi ancora queste mie lettere, ma mi piace pensarlo. Ieri sera, mentre preparavo un compito di prova per le mie quinte (ti piacerebbero, alcuni ti somigliano) ho pensato ad un problema che sono sicuro ti sarebbe interessato da studente. Sono partito da una domanda semplice: come collegare un certo numero di resistenze da 1 ohm in modo da avere una resistenza totale equivalente pari a  $\frac{7}{3}$  ohm. Usando collegamenti in serie e in parallelo la risposta è piuttosto immediata. Poi mi è venuto in mente di chiedere se fosse possibile in modo analogo ottenere una resistenza pari a un qualsiasi numero razionale positivo. Ed ecco la risposta, semplice e (a mio avviso) elegante.

Sappiamo che collegando due resistenze in serie si ha una resistenza equivalente data dalla somma

$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2$$

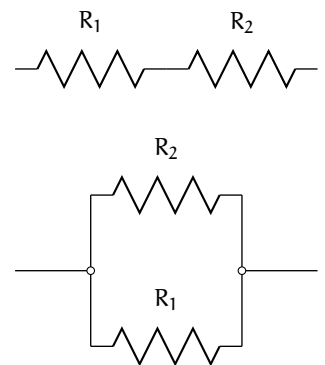
Sappiamo anche che collegando due resistenze in parallelo si ha una resistenza il cui reciproco è la somma dei reciproci

$$R_{\text{tot}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Immaginiamo dunque di avere una resistenza con valore razionale  $R = \frac{p}{q}$ ; se la mettiamo in serie con una resistenza da 1 ohm otterremo

$$R_{\text{tot}} = \frac{p}{q} + 1 = \frac{p + q}{q}$$

se la mettiamo in parallelo con una resistenza da 1 ohm otterremo



$$R_{\text{tot}} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{p}{p + q}$$

Queste sono esattamente le due operazioni che permettono di costruire a partire dal numero 1 tutti i numeri razionali in quello che si chiama albero di Calkin-Wilf (vedi [9])

Dunque componendo in serie e in parallelo resistenze da 1 ohm posso ottenere un qualsiasi numero razionale. E siccome gli irrazionali sono rami infiniti sull'albero di Calkin-Wilf, componendo infinite resistenze in serie e in parallelo posso ottenere una resistenza equivalente irrazionale qualsiasi. Per esempio se parto da una resistenza da 1 ohm e metto in serie con un'altra da 1 ohm ottengo una da 2 ohm. Se questo sistema lo compongo in parallelo con una da 1 ohm ottengo una da  $\frac{2}{3}$  ohm. Se metto in serie ad un'altra da 1 ohm diventa in totale  $\frac{5}{3}$  ohm, un'altra in parallelo diventa  $\frac{5}{8}$  ohm, un'altra in serie diventa  $\frac{13}{8}$  ohm etc etc. Riconoscerai i rapporti tra numeri successivi della serie di Fibonacci, rapporti che convergono al numero irrazionale aureo.

Il territorio da esplorare è ampio, ma la lettera è finita. Questo esempio banale rafforza però una mia idea di cui spesso vi parlavo in classe (e ogni tanto ancora lo faccio): i compiti in classe non sono atti burocratici o procedure selettive standardizzate, sono piccoli manifesti di intenti, luoghi di incontro e confronto (mai di scontro), frontiere da attraversare e ridisegnare. Te le ricordi le nostre frontiere? Ti ricordi l'aula in fondo al corridoio?

Io non ricordo più molto. Non ricordo più il tuo volto, la tua voce è diventata quella di una folla che ti ha sostituito in tutti questi anni. Non penso molto a te, ma quando succede ritorna improvviso il suono del telefono che squilla la sera tardi. In quell'istante esatto mi manchi.

Ho parlato dell'albero di Calkin-Wilf per esempio (ma non solo) in [LetteraIrrazionalita](#), [IrrazionalitaRadiceDue](#) e [IrrazionalitaRadiceDueBis](#).

## ET IN ARCADIA EGO. UN RITRATTO DI ZENO PYCHA

Lo ricordo nell'atrio dell'albergo, con un libro di  
matematica in mano, guardare a volte i colori irrecu-  
perabili del cielo.

— Jorge Luis Borges

Sono polvere.

Conservata nei corridoi di questa scuola, custodita dal tempo e nel tempo. Simile al matematico gesso che si appiccica ai vestiti, che entra nella pelle, che lucida gli occhi. Il gesso che avevo tra le dita il giorno in cui ho finito di fare lezione, il pomeriggio in cui sono diventato polvere io stesso. Ho sbriciolato la mia ultima equazione in classe il 17 ottobre del 1953, il giorno prima del mio cinquantatreesimo compleanno, simmetria quasi perfetta. Con l'immancabile sigaretta nella mano, sono rimasto ancorato alle piccole consuetudini fino all'ultimo. Le nostre vite sono linee continue ed orientabili nello spaziotempo; nel cronotopo, come lo chiamavamo negli anni trenta, come lo chiamò per la prima volta Hermann Minkowski nel 1908. Ma sono linee finite il cui bordo non è determinabile, se non approssimativamente; due punti di accumulazione che racchiudono il nostro tempo. Nel passato la nascita, minuscolo big bang personale; nel futuro la morte, creatrice di polvere. Spaventosi confini di vertigine entrambi; inevitabili, complementari e, nel mio caso, quasi simmetrici. Per un giorno.

Sono polvere, ma non lo sono sempre stato.

Nel breve tempo in cui mi avete chiamato Zeno, anche io, come voi, ho vissuto. Anche io, come voi, sono stato in Arcadia, come i pastori del quadro di Paussin che tanto amai da ragazzo. Adesso quei pastori siete voi, voi che ancora respirate questi corridoi, queste aule, questi luoghi che ancora, a modo loro, mi ospitano. Prima di diventare polvere ho visto cose meravigliose, ne ho ricordo e memoria, anche qui, anche adesso. Con la matematica, per la matematica, attraverso la matematica ho visto un orizzonte che è riservato a pochi viaggiatori.

«Sul campo metrico di Weyl nel microcosmo», questo il titolo della mia tesi di laurea. Milano, 1931, nono anno dell'era fascista. Sulla co-

Pubblicato sull'annuario del Liceo Scientifico G. Marinelli in occasione del centenario della sua fondazione.

Ringrazio la collega Angela Schinella per avermi chiesto di scrivere questo breve ritratto di Zeno Pycha, professore di Matematica e Fisica al Marinelli dal 1935 al 1955. Ringrazio anche Anna Tomasella per avermi aperto gli scaffali polverosi della biblioteca storica del Marinelli ed avermi fatto ritrovare alcuni scritti di Pycha (firmati con la sua sottile grafia da pennino d'altri tempi).

In un primo momento avevo pensato di costruirne un breve profilo biografico e scientifico, ma il collega e amico Francesco De Stefano mi ha preceduto di circa 10 anni avendo scritto un bellissimo ricordo di Pycha nell'annuario del novantesimo del Marinelli (rimando a tale articolo per ulteriori notizie sulla sua vita e sulla sua breve ma intensa produzione scientifica). Ho quindi preferito impostare il ritratto su un registro diverso nella speranza di incuriosire e spingere ad ulteriori, personali esplorazioni. Mi sono servito delle poche fonti a mia disposizione, per il resto ho immaginato; mi scuso per ogni eventuale distorsione.

Il titolo e l'idea di fondo vengono dalla lettura di un saggio di Erwin Panofsky [10] sull'opera del pittore Poussin e sull'indistricabile connessione tra memoria, malinconia e permanenza che la matematica (e in parte la poesia) rivela appieno.

pertina sbiadita dal tempo si vede ancora quel EF vergato a mano. Una tesi ardita, un tentativo importante dice il mio maestro, Bruno Finzi. Di soli tre anni più vecchio di me, è appena diventato titolare di cattedra all'Università. E lui a indirizzarmi verso questa tesi, elogiando il mio lavoro. Per incoraggiamento, o per speranza che qualcuno possa seguire le sue intuizioni. Sono gli anni d'oro della fisica moderna, ogni nostro passo sembra aprire strade impensabili, impensabili risultati. Il campo metrico che compare nel titolo è una intuizione di Einstein e il nome di Einstein compare (nel maiuscolo incerto della macchina da scrivere) subito, nelle prime righe. Il padre di tutto quello che stiamo provando, tentando, immaginando, di ogni nostra intuizione. Ancora al suo posto a Berlino, per poco. Sono anni veloci, sono anni terribili, ombre di inquietudine si stendono sull'Europa. Proprio nel 1931, mentre mi laureo, Einstein scrive al ministro italiano della Giustizia, Alfredo Rocco sull'imposizione di giuramento di fedeltà al partito fascista a tutti gli accademici d'Italia. E' necessaria questa umiliazione? Einstein rimane generico nella lettera, ma sta pensando a Tullio Levi-Civita, il grande matematico italiano che ha salvato, insieme a Emmy Noether, la teoria della relatività generale dalle sue contraddizioni matematiche e a cui Einstein è particolarmente legato per stima e riconoscenza. Nessuna risposta dal ministro. Milano non è Berlino, abbiamo giurato quasi tutti, io continuo a pensare alla mia tesi.

Il campo metrico che descrive gli effetti della gravità sulla geometria dello spazio e del tempo è un'idea di Einstein, ma non è il suo nome che compare nel titolo. Weyl ha modificato, ampliato e generalizzato le idee di Einstein per includere l'elettromagnetismo nelle equazioni del campo, per unificarlo con la gravitazione ed ottenere una teoria universale. Abbraccio subito quell'idea, la faccio mia, la esploro, non posso sapere che è un vicolo chiuso, che già in quegli anni sia Einstein che lo stesso Weyl nutrono dubbi su questa strada. Ma l'approccio sembra buono ed io provo una via ancora più radicale: portare l'unificazione nel microcosmo, nel regno incerto della nascente fisica quantistica. Vado avanti, segno il terreno; Finzi ha tracciato una direzione, ma sono io che ho camminato, che ho fatto i calcoli, che ho avanzato nuove ipotesi, non lui. Non lui che nel 1932 partecipa al Convegno dei Matematica Internazionale a Zurigo, un evento importante, la riunificazione della comunità scientifica dopo le divisioni dovute alla grande guerra. Ascolta la conferenza di Emmy Noether, prima donna invitata a parlare ad una sessione plenaria. Bruno parla davanti alle migliori menti matematiche dell'epoca, si confronta in quella occasione con lo stesso Weyl. Ma parlano di altro, presumo; io non sono andato a Zurigo, l'idea dell'unificazione nel microcosmo

la coltivo ormai solo io, a Milano. Come si concilia lo spaziotempo regolare, continuo, infinitamente derivabile di Einstein (il cronotopo, sono affezionato a questo termine ormai desueto) con la natura discontinua del mondo quantistico? Il problema diventa ossessione in quegli anni e lo sarà per molti nei decenni successivi. Ne parlo nel gruppo di lavoro riunito intorno a Finzi e al Seminario Matematico e Fisico di Milano dove nel '32 faccio parto del comitato direttivo. Con Radici, con Rota, con Rossi. Con Pastori, l'astro nascente della matematica tensoriale; sarà lei a collaborare con Bruno per anni, sarà lei ad ereditare moralmente e matematicamente la ricerca sul calcolo tensoriale, un filo che la lega ai più grandi matematici, Tullio Levi-Civita in testa. Quando verrà cacciato dall'università in quanto ebreo, Maria gli scriverà una bellissima lettera. Ma adesso, nel 1931, a Milano, anche con lei mi confronto. Fino a sera, oltre la sera, parlo della mia idea nascente.

Sono in Arcadia, la mia personale Arcadia matematica. E scrivo. Due memorie importanti, 1932 e 1933; sempre con la conversione in era fascista, scritta in numero romano. Ma non più a mano o con la macchina da scrivere, come per la tesi di laurea; questa volta la dicitura è stampata vicino all'intestazione della Regia Accademia Nazionale dei Lincei. Ho proposto una nuova struttura dello spaziotempo, l'ho chiamato fibrato, come se fosse un tessuto. Da lontano sembra lo stesso spaziotempo di Einstein e Weyl, una varietà quadrimensionale continua; ma da vicino diventa altro, emerge la sua natura quantistica, indeterminata e indeterminabile. Credo sia la strada giusta, ho usato quella che oggi chiamereste geometria non commutativa. Indago questa nuova struttura, cerco di capire se sia connessa, se ci siano dei buchi. Parlando dell'universo proprio in quegli anni Borges scrive: «abbiamo ammesso nella sua architettura tenui ed eterni interstizi di assurdità per sapere che è falso». Ecco, a Milano, in quei pochi e rapidissimi anni, ho ipotizzato, studiato, esplorato interstizi di assurdità nella struttura intima dello spazio e del tempo. La mia personale Arcadia.

Nel 1933 Hitler sale al potere. Einstein e Weyl, che riempiono le mie pagine, si spostano a Princeton per non tornare mai più in Europa. Non è ancora arrivata l'etichetta di fisica ebraica, i miei lavori sono passati in tempo prima della censura. Ma mi sono fermato. Nel 1933 mi fermo. In ufficio ho una pila di copie dei miei articoli, le ho fatte stampare per distribuirle ai convegni, per mandarle, come si usa, ad altri studiosi, a qualcuno che possa capire questa idea di spaziotempo come tessuto non commutativo. Sono firmati a mano, con pennino e inchiostro: «Per omaggio devotamente offre l'autore, Pycha». Devotamente offro. Rimangono con me. Non provo tristezza,

non ho rimpianti. Et in Arcadia ego. C'ero, ci sono stato. Ancora la malinconia dei pastori nel quadro di Poussin. Perché ho smesso? Indeterminazione.

Passano due anni, la leva militare, e poi, nel 1935, passo il concorso a cattedra per i Licei Scientifici del regno. Un salto temporale, un salto quantistico. A Udine, al Regio Liceo Scientifico Giovanni Marinelli, trovo un altro tipo di universo, un nuovo fibrato non meno misterioso. Invece delle geometrie non commutative, al posto dei tensori, mi ritrovo tra banchi, lavagne e la necessità di spiegare la fisica e la matematica dalle basi. La bellezza dello stare in classe diventa quotidiana. Anche qui c'è una trama nascosta, un tessuto non visto, anche qui inizio a costruire la mia personale visione; seduto alla cattedra provo un nuovo tipo di unificazione, studenti e studentesse sono un cronotopo vastissimo dove cercare interstizi eterni.

Un salto, ancora uno, l'ultimo. La guerra è finita, Udine si srotola tra le montagne e una pianura discontinua, un altro fibrato, un cronotopo immutabile. Non scrivo più di fisica o matematica, i miei lavori con dedica scritta a mano sono in qualche scaffale della biblioteca del Marinelli in attesa della polvere (ancora lei), Milano sembra lontana, a volte mi manca la mia piccola Ortisei. Ho pubblicato un libro nel 1951, poche copie, una riflessione epistemologica sulla scienza da cui però mi sento ormai lontano. «Razionalità e Realtà», un nuovo tentativo di ricostruire, di ricostruirmi. Da qualche parte, nei meandri del Ministero, ce n'è una copia che ho spedito per il Premio per le Scienze Filosofiche del Presidente della Repubblica, «classe di scienze morali», così dice la dicitura. Lo ha vinto Gaetano Capone-Braga e la copia non me l'hanno restituita.

Tutto mi avvicina al mio ultimo punto di accumulazione. Il quadro di Poussin sbiadisce, prende forma un altro quadro, del Guercino, di poco anteriore. Et in Arcadia ego; cambia però il soggetto, adesso a parlare non è il ricordo di un tempo migliore, è la morte. Anche in Arcadia il tempo termina, persino in questa terra ideale la linea spaziotemporale ha un'estensione finita. Alla malinconia del passato subentra la fredda verità che ci rende umani. Spietatamente umani.

Lo spaziotempo conserva il suo segreto, almeno per me. Ho vissuto in Arcadia? Posso conservarne il ricordo anche ora che parlo da solo nei corridoi di questa scuola, anche ora che osservo le lavagne dall'altro lato? O è della morte l'ultima parola, il suo dominio sui ricordi, la vera e unica Arcadia? Guercino con il suo memento mori o Poussin con la malinconica rievocazione di una vita passata? Ha importanza scegliere? Non credo, forse possiamo lasciare ancora una volta indeterminata la risposta.

Sono polvere, anche voi lo sarete. Ma di polvere è fatto l'universo e il suo inconfondibile tessuto. Averlo intravisto è il senso di quella minuscola porzione di spaziotempo che qualcuno chiamò, con affetto, Zeno Pycha.



---

## <TruccoMagiaPolinomiale>

venerdì 11 novembre 2022 21:20

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#))

---

Chiedi a un amico o a un'amica di pensare, senza dirtelo, ad un polinomio  $p(x)$  di grado qualsiasi, che soddisfi le seguenti condizioni:

1. i coefficienti siano tutti interi non negativi
2. non sia un monomio.

Tra lo stupore generale del pubblico sarai in grado di determinare in modo univoco ed esatto il polinomio pensato chiedendo soltanto due valori particolari; questa cosa sembra impossibile, un polinomio di grado  $n$  può avere fino a  $n + 1$  coefficienti, come è possibile determinarli tutti con soli due valori del polinomio? Fai colpo su tutti e tutte chiedendo i due seguenti valori:  $p(1)$  e  $p(p(1))$ .

Il trucco a questo punto è semplice: esprimi il numero  $p(p(1))$  (che per le condizioni del gioco sarà un numero intero e positivo) in base  $p(1)$  e il gioco è fatto, i coefficienti nello sviluppo delle potenze di  $p(1)$  sono esattamente i coefficienti del polinomio da indovinare. Prima di discutere brevemente il perché (sono sicuro che hai già capito), facciamo un esempio; supponiamo che ti siano stati dati i valori  $p(1) = 7$  e  $p(7) = 17845$ . Esprimi il secondo numero in base 7; ovviamente per numeri così alti avrai bisogno di un po' di tempo (o di un piccolo aiuto informatico), ma alla fine otterrai il seguente risultato

$$17845 = 1 \cdot 7^5 + 3 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0$$

che è appunto lo sviluppo di 17845 in base 7. Allora il polinomio cercato è

$$p(x) = x^5 + 3x^3 + x + 2$$

Qualche breve commento. La richiesta di  $p(1)$ , che è la somma dei coefficienti del polinomio, serve ad ottenere una base più grande di ciascun coefficiente del polinomio. Una volta ottenuta tale base,  $p(p(1))$  è un numero la cui espansione nella base  $p(1)$  fornisce i coefficienti cercati; per completare, il teorema di rappresentazione in base garantisce che lo sviluppo di  $p(p(1))$  in base  $p(1)$  esiste ed è unico.

**UN'ALTRA DIMOSTRAZIONE DELL'IRRAZIONALITÀ DI  $\sqrt{2}$** 

You can't always get what you want  
— Rolling Stones

A completamento di [IrrazionalitaRadiceDue](#), propongo qui di seguito una ulteriore strada usando sempre l'albero di Calkin-Wilf [9]

Sia dunque dato l'albero di Calkin-Wilf,  $\Gamma$ ; chiamiamo *sequenza di Calkin-Wilf* la sequenza di numeri razionali positivi ottenuta attraversando  $\Gamma$  per ordine di livello

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, \dots$$

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni.

**Proposizione 1**

Se  $x$  appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf, allora il successivo elemento nella sequenza è dato dalla seguente funzione

$$S(x) = \frac{1}{2\lfloor x \rfloor + 1 - x}$$

dove  $\lfloor x \rfloor$  indica la parte intera di  $x$  (la funzione *floor*).

**Proposizione 2**

Se  $x$  appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf, allora tutti gli elementi  $x + n$  con  $n \in \mathbb{N}$  e  $n > 0$  compaiono nella sequenza in ordine.

*Dimostrazione*

Infatti, per costruzione dell'albero  $\Gamma$ , l'elemento  $x + n$  si trova  $n$  livelli al di sotto di  $x$ . ■

**Proposizione 3**

$\sqrt{2}$  non appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf.

*Dimostrazione*

L'albero di Calkin-Wilf è un argomento a cui sono sentimentalmente legato: <https://www.doppiozero.com/lalbero-di-calkin-wilf>

Per una dimostrazione si veda [11]

Ipotizziamo per assurdo che appartenga alla sequenza; è facile verificare per calcolo diretto che

$$S^6(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 4$$

dove con  $S^6$  indichiamo la funzione  $S$  applicata 6 volte. Si vede anche, sempre con calcolo diretto, che non ci sono altri numeri nella forma  $\sqrt{2} + n$  tra  $\sqrt{2}$  e  $S^6(\sqrt{2})$ . Ma questo contraddice la precedente proposizione. Quindi  $\sqrt{2}$  non appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf. ■

Dall'ultima proposizione si evince, ancora una volta, che  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale.

lunedì 30 maggio 2022 03:01

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#) | [LetteraRazionaleResistenza](#) | [IrrazionalitaRadiceDueBis](#))

---

**L'IRRAZIONALITÀ DI  $\sqrt{2}$  PER ALTRA VIA**

In questa breve nota cercherò di dimostrare in modo semplice alcune proprietà dei numeri razionali che portano ad un risultato piuttosto noto. L'intento è pedagogico e non di ricerca e l'epigrafe riportata ne rappresenta lo spirito; esistono in letteratura e sui libri scolastici dimostrazioni dello stesso fatto molto più brevi. L'idea è però che alle volte una passeggiata su strade non battute possa distrarre dal quotidiano (come ci insegna Robert Frost). Non vi è pretesa di originalità, l'unico valore di questa minuscola fatica è proporre spunti di possibili approfondimento e di esercizio personale a studenti e studentesse.

Definiamo due particolari funzioni su  $\mathbb{R}$ , nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x) &= x + 1 \\ \mathcal{S}(x) &= \frac{x}{x + 1}\end{aligned}$$

Se le restringiamo ai numeri razionali positivi non nulli  $\frac{p}{q}$ , assumeranno questa forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p + q}{q} \\ \mathcal{S}\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{p + q}\end{aligned}$$

Si vede facilmente che entrambe le funzioni sono chiuse su  $\mathbb{Q}_0^+$ , ovvero il loro risultato se calcolate su un numero razionale positivo non nullo è ancora un numero razionale positivo non nullo.

Valgono allora le seguenti proposizioni:

**Proposizione 1**

Se  $x \in \mathbb{Q}_0^+$  è ai minimi termini, allora anche  $\mathcal{D}(x)$  e  $\mathcal{S}(x)$  lo sono.

*Dimostrazione*

Il numero razionale positivo non nullo  $p/q$  è ai minimi termini se  $p$  e  $q$  sono primi tra loro, ovvero 1 è l'unico divisore comune. Si vede subito che se  $p$  e  $q$  sono primi tra loro allora lo sono anche con la loro somma. Infatti supponiamo che  $p + q$  e  $q$ , per esempio, abbiano un

Ho già parlato in modo più esteso di questa idea usando l'albero di Calkin-Wilf in [LetteraIrrazionalita](#); in quella nota il linguaggio era didattico e poco formale, qui ho cercato di asciugare quel discorso all'essenziale.

Vale forse la pena ricordare che se  $p/q \in \mathbb{Q}_0^+$  allora  $p$  e  $q$  sono entrambi numeri naturali diversi da 0.

divisore comune  $b$  diverso da 1; allora  $p + q = bk$  e  $q = bh$  e dunque  $p + bh = bk$  da cui segue  $p = b(k - h)$ . Ma allora  $b$  è anche divisore di  $p$ , contraddicendo l'ipotesi che  $p$  e  $q$  sono primi tra loro. Da questo risultato ne discende che  $\mathcal{D}\left(\frac{p}{q}\right)$  e  $\mathcal{S}\left(\frac{p}{q}\right)$  sono ridotti ai minimi termini se lo è  $\frac{p}{q}$ . ■

Immaginiamo quindi di comporre le funzioni  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  tra di loro in una sequenza arbitraria; per esempio  $\mathcal{D}(\mathcal{S}(\mathcal{S}(x)))$  è una sequenza in cui si calcola  $\mathcal{S}$  sul numero  $x$ , il risultato lo si usa come argomento di  $\mathcal{S}$  e il risultato di quest'ultima si usa come argomento di  $\mathcal{D}$ . Si possono immaginare sequenze arbitrariamente lunghe.

## Proposizione 2

Se  $x \in \mathbb{Q}_0^+$  e  $T$  è una qualsiasi sequenza di  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$ , allora  $T(x) \neq x$ .

*Dimostrazione*

Intanto è facile verificare che la somma di numeratore e denominatore di un numero razionale positivo non nullo aumenta se applichiamo  $\mathcal{D}$  o  $\mathcal{S}$ . Infatti, per esempio,

$$\mathcal{D}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{q}$$

e  $p + q + q > p + q$ . Analogamente per  $\mathcal{S}$ . Quindi se applichiamo a  $x$  una sequenza  $T$  di  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  avremo che la somma di numeratore e denominatore di  $T(x)$  sarà strettamente maggiore della somma di numeratore e denominatore di  $x$ . Ma allora  $T(x)$  non può essere uguale a  $x$  in quanto essendo entrambi razionali positivi non nulli ai minimi termini (per la Proposizione 1), se fossero uguali dovrebbero avere numeratori e denominatori uguali ma con somme differenti, cosa impossibile. ■

Per inciso questo significa che se applichiamo una sequenza arbitrariamente lunga di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{D}$  a partire da un numero razionale positivo non nullo  $x$ , la sequenza di risultati non è periodica, ovvero non passa mai due volte sullo stesso valore.

## Proposizione 3

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_0^+$$

*Dimostrazione* Supponiamo che  $\sqrt{2}$  sia un numero razionale positivo non nullo. Si vede da calcolo diretto che  $\mathcal{D}(\mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathcal{D}(\sqrt{2})))) = \sqrt{2}$ , ma questo contraddice la proposizione 3 in . Dunque  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale. ■

Analoga dimostrazione vale probabilmente per ogni irrazionale algebrico.

sabato 31 luglio 2021 18:26

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#) | [LetteraRazionaleResistenza](#) | [IrrazionalitaRadiceDue](#))

---

## LETTERA SULL'IRRAZIONALITÀ

Carissima A, ti scrivo queste poche righe in questa lunga pausa dal reale che molti chiamano estate. Ci sei mancata a scuola, abbiamo a lungo guardato il tuo banco temporaneamente vuoto, lo abbiamo immaginato abitato, siamo rimasti in attesa. Mi piace la parola temporaneamente, odora di futuro, di cambiamento, di risalita. Settembre è vicino, non abbiamo fretta, quando tornerai riprenderemo il discorso nel punto esatto in cui lo abbiamo interrotto.

Nella mia ultima email avevo promesso di scriverti qualcosa di bello. Ci ho pensato a lungo e quando qualche giorno fa mi sono imbattuto per caso (che è l'unica bandiera che sento mia) in una dimostrazione, ho pensato a te. Non è una dimostrazione particolarmente bella, a dire il vero. E non è nemmeno una scoperta originale, come ho scoperto poco dopo esserci arrivato. Ma come tutte le strade meno battute ha il merito di costare un po' di fatica e di regalare orizzonti più ampi.

Voglio quindi dimostrarti che  $\sqrt{2}$  è un numero irrazionale. Per farlo dovrò introdurre alcune idee che non fanno parte dell'usuale matematica di seconda. Ma siccome non sono tuo insegnante di matematica mi sento libero dal peso di dover seguire strade consolidate; possiamo per un attimo liberarci dei vincoli (reali o immaginari) di un percorso scolastico e parlare liberamente per il solo piacere di scoprire cose nuove.

L'irrazionalità della radice di 2 è un passaggio fondamentale nella storia della matematica, esistono tantissime (infinite forse) dimostrazioni a partire da quella storica di Ippaso di Metaponto che per qualche motivo a me oscuro non viene quasi mai proposta a scuola. La dimostrazione che ti propongo in questa lettera non è la migliore, non è la più elegante, non è la più semplice o la più breve. Ma non la troverai facilmente (era sfuggita anche a me in un primo momento tanto da essermi stupidamente convinto di aver trovato qualcosa di nuovo) e questo la rende ricca di possibili (mi auguro) approfondimenti e suggestioni.

Ma andiamo con calma. Cosa sia la radice quadrata di 2 dovresti saperlo da un po', è quel numero positivo che moltiplicato per sé

La mia dimostrazione preferita dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$  rimane quella di [Estemann](#).

stesso restituisce 2. O, è la stessa cosa, è quel numero positivo che elevato al quadrato fa 2. Niente di più semplice. Cosa significa che  $\sqrt{2}$  è irrazionale (che è esattamente quello che voglio dimostrarti)? Significa semplicemente che non è razionale, cioè non può essere espresso come rapporto (ratio) tra due numeri naturali (interi positivi, se preferisci). Una conseguenza di questo fatto, che studierai quest'anno, è che da questo si dimostra che lo sviluppo decimale di  $\sqrt{2}$  è infinito non periodico, quindi sostanzialmente è un numero inconoscibile (alogoi, li chiamavano i greci antichi). Studierai anche che di numeri irrazionali ce ne sono infiniti e giocano un ruolo fondamentale nell'architettura della matematica.

Qui però siamo interessati a questo semplice fatto, non è possibile esprimere  $\sqrt{2}$  come rapporto tra interi positivi. Cioè non è possibile scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

con  $a$  e  $b$  numeri naturali.

Per farlo ti mostrerò una struttura matematica molto semplice e affascinante, detta **albero di Calkin-Wilf**, che contiene esattamente tutti i numeri razionali e ti dimostrerò che  $\sqrt{2}$  non può appartenere a tale struttura e dunque non è razionale.

Pronta? Iniziamo. Dato un qualunque numero razionale positivo  $\frac{a}{b}$  (d'ora in poi ometterò di specificare positivo, lavoreremo esclusivamente con numeri positivi) definiamo due operazioni nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{a+b}{b} \\ \mathcal{S}\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

Entrambe queste due operazioni (tecnicamente si chiamano funzioni, studierai a breve) prendono un numero razionale e restituiscono un nuovo numero razionale. Possiamo rappresentarle visivamente come in figura ( $\mathcal{D}$  va a destra e  $\mathcal{S}$  a sinistra)

Questo è quello che in matematica si chiama un **albero** costituito da alcuni **nodi** (in questo caso tre) collegati da dei **rami** (in questo caso due). Dunque dal nodo  $\frac{a}{b}$  partono due rami che portano ai due nodi  $\frac{a}{a+b}$  e  $\frac{a+b}{b}$ . In gergo questi due nodi si chiamano **figli** mentre il nodo di partenza si chiama **genitore**.

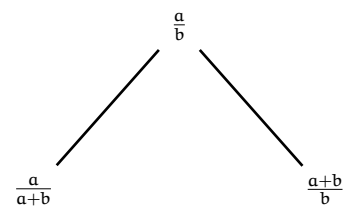


Figura 12: Rappresentazione visuale di  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$ .

Un primo risultato facile da verificare è che  $\mathcal{D}(x) > x$  e  $\mathcal{S}(x) < x$  da cui si deduce immediatamente che i due figli di un nodo sono diversi tra loro (ricorda questo risultato perché ci servirà tra poco).

A questo punto è possibile estendere l'albero partendo dai figli ed applicando le operazioni  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  viste sopra; questa estensione può essere fatta quante volte si vuole, al limite anche all'infinito. Se il numero di partenza da cui far partire l'albero è la frazione  $\frac{1}{1}$  (cioè il numero 1), si ottiene un albero infinito che prende il nome di **albero di Calkin-Wilf**.

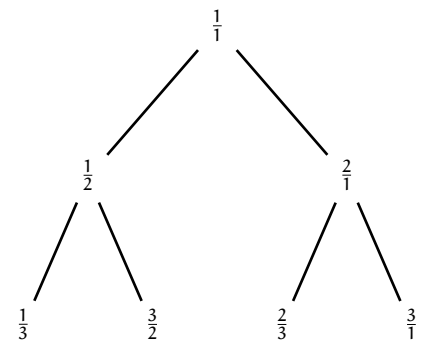


Figura 13: I primi tre livelli dell'albero di Calkin-Wilf

Perché è importante tale struttura (se sei interessata [qui trovi l'articolo originale](#))? Semplice, si dimostra facilmente (lo farò tra un attimo) che tale albero contiene esattamente tutti i numeri razionali. Inoltre questa particolare disposizione possiede molte proprietà interessanti, se ci sarà modo e tempo ne parleremo in futuro.

Per poterti mostrare che ogni razionale appartiene all'albero conviene introdurre un'ulteriore operazione su razionali che in qualche modo è l'inversa delle operazioni  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  introdotte prima. Chiamiamola  $\varphi$  e definiamola nel seguente modo

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} \frac{a}{b-a} & \text{se } b > a \\ \frac{a-b}{b} & \text{se } a > b \end{cases}$$

Penso ti sarà facile convincerti che effettivamente  $\varphi$  risale l'albero a ritroso, calcolandola su un numero razionale positivo diverso da 1 ne restituisce il genitore. Fai pure qualche prova tu stessa, vedrai che è così.

A questo punto è possibile mostrare un risultato fondamentale e che ci permetterà di ottenere tutti gli altri. Se applico  $\varphi$  ad un razionale  $\frac{a}{b}$  ottengo un nuovo razionale in cui o il numeratore o il denominatore è più piccolo. Se continuo ad applicare  $\varphi$ , numeratore e denominatore continuano a diminuire e siccome sono interi positivi ad un certo punto dovranno arrivare a 1 (questo risultato si può ottenere in modo rigoroso con il limite di successioni, ma sono cose che farai in quarta, per ora ti chiedo di fidarti dell'idea intuitiva che ti ho qui proposto). Riassumendo, applicando  $\varphi$  un certo numero di volte partendo da un razionale positivo si arriva sempre a 1.

A questo punto possiamo dimostrare che l'albero di Calkin-Wilf contiene tutti i razionali. Supponiamo infatti per assurdo che non contenga un particolare razionale  $\frac{a}{b}$ . Applicando  $\varphi$  otteniamo un nuovo razionale che non deve essere contenuto nell'albero, altrimenti ci sarebbe anche  $\frac{a}{b}$  che ne è uno dei figli. Applicando il ragionamento

a questo nuovo numero razionale e al successivo e così via arriviamo prima o poi al numero  $\frac{1}{1}$  ottenendo il risultato che 1 non deve appartenere all'albero. Ma noi sappiamo che 1 appartiene all'albero (è il nodo di partenza), quindi abbiamo appena trovato un assurdo. Se ipotizziamo che esista un  $\frac{a}{b}$  che non appartiene all'albero ne discende che nemmeno  $\frac{1}{1}$  deve appartenere; siccome questo non è possibile, non ci possono essere razionali che non siano contenuti nell'albero di Calkin-Wilf.

Non solo, si può anche dimostrare che tutti i razionali sono contenuti nell'albero nella loro forma ridotta ai minimi termini (puoi provare tu come esercizio, ti lascio un indizio: nella frazione  $\frac{a}{b}$  il MCD tra a e b non viene cambiato se applico  $\varphi$ .)

Infine possiamo dimostrare che non ci sono duplicati, cioè che non solo l'albero di Calkin-Wilf contiene tutti i razionali positivi, ma li contiene una ed una sola volta. La dimostrazione non è difficile, ma per non appesantire il contenuto di questa lettera lascio a te pensarci autonomamente, non dovesse riuscirci basta che me lo fai sapere e ti scrivo ancora.

Bene, siamo quasi arrivati all'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ , fammi prima riassumere quanto abbiamo ottenuto. Esiste un albero di numeri razionali, detto albero di Calkin-Wilf, che contiene tutti i numeri razionali positivi una ed una sola volta come propri nodi.

Adesso ti dimostrerò che  $\sqrt{2}$  non può appartenere a questo albero. Per farlo fammi riscrivere in forma più comoda i due operatori  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$ ; infatti

$$\mathcal{D}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$$

da cui possiamo scrivere

$$\mathcal{D}(x) = x + 1$$

Analogamente per l'altra operazione è facile mostrare che si ottiene

$$\mathcal{S}(x) = \frac{x}{x+1}$$

Adesso ipotizziamo che  $\sqrt{2}$  sia un numero razionale. Dunque si trova da qualche parte nell'albero di Calkin-Wilf. Applichiamo  $\mathcal{D}$  per trovare il suo figlio a destra; otteniamo

$$\mathcal{D}(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$$

Adesso troviamo il figlio a sinistra di questo numero:

$$\mathcal{S}(\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dove l'ultimo passaggio (la razionalizzazione) l'ho ottenuto moltiplicando e dividendo la frazione per  $(2 - \sqrt{2})$ . Cerchiamo il figlio sinistro di questo nuovo numero:

$$\mathcal{S}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2} - 1$$

dove nuovamente l'ultimo passaggio si ottiene con razionalizzazione. Infine (promesso), cerchiamo il figlio a destra di quest'ultimo numero:

$$\mathcal{D}(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$$

Abbiamo un problema: ipotizzando che  $\sqrt{2}$  sia razionale e quindi si trovi da qualche parte sull'albero, abbiamo trovato che muovendosi lungo i rami dell'albero (a destra, poi due volte a sinistra, infine di nuovo a destra) troviamo nuovamente  $\sqrt{2}$ . Ma questo è impossibile, significherebbe che l'albero di Calkin-Wilf contiene due copie dello stesso numero (anzi infinite perché posso ripetere di nuovo tutto il ragionamento). Dunque  $\sqrt{2}$  non può appartenere all'albero e quindi non è un numero razionale. Siamo di fronte ad un numero irrazionale (alogos), che non può essere scritto come frazione  $\frac{a}{b}$ .

Ci sarebbero ancora tantissime cose da dire, vedere, dimostrare. Ma temo di essermi già dilungato troppo. Ti lascio solo con un risultato che sembra interessante: se scrivo anche la funzione  $\varphi$  in modo più generico come ho fatto per  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  (ti lascio i dettagli algebrici)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

allora si vede che se applico  $\varphi$  ripetutamente a  $\sqrt{2}$  torno ad un certo punto al valore di partenza  $\sqrt{2}$ . Dunque sembra che  $\varphi$  applicata ripetutamente ai razionali arrivi prima o poi a 1 (come abbiamo già discusso prima), se invece la applico agli irrazionali questo non succede. Una funzione che in qualche modo può essere usata (lo abbiamo fatto in un certo senso anche noi qui sopra) per determinare se un numero sia razionale o irrazionale (o almeno sia un irrazionale sotto forma di radicale).

Ho davvero esagerato e ti chiedo scusa. Dimentica pure tutta la matematica di cui ti ho parlato, l'unico valore che attribuisco a questa lettera, cara A, è che ho il desiderio di raccontarti cose. Non vedo l'ora di riaverti in classe.

Un caro saluto, prof.

---

## <ManifestoGuerrigliaMatematica>

lunedì 17 giugno 2019 23:49

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#) | [GuerrigliaMatematica](#))

---

### MANIFESTO PER UNA GUERRIGLIA MATEMATICA

Tempo fa mi è capitato di aiutare alcuni ragazzi ed alcune ragazze dell'ultimo anno di un Liceo Scientifico; contattato pochi giorni prima dell'Esame di Stato Conclusivo per alcune difficoltà in matematica e non essendo io coinvolto negli esami, ho provato a dare una mano. Non erano delle mie classi, ma i figli e le figlie in prestito alle volte ci raggiungono da direzioni inaspettate. Non essendoci il tempo di prenotare un'aula e chiedere le dovute autorizzazioni per la concessione di spazi a scuola ed essendo un periodo complesso per il personale scolastico impegnato a preparare aule e corridoi per l'imminente esame, ho deciso di aiutare gli studenti e le studentesse dando appuntamento in un bar del centro, un luogo inconsueto per la matematica. Ci siamo visti per quattro incontri, tra caffè e musica in sottofondo abbiamo affrontato paure, teoremi, equazioni e dubbi ed ho capito in quella occasione che no, non esistono luoghi inconsueti per la matematica. Quest'anno ho provato a replicare l'esperienza, stessa sensazione che qualcosa di buono si possa ottenere dal portare la matematica fuori da un'aula scolastica. Non mi riferisco ad azioni di divulgazione, sempre interessanti ed importanti; parlo proprio di fare matematica con studenti e studentesse, ma fuori dall'ambiente formale a cui siamo abituati ogni mattina.

Nel 1984 il pubblicitario Conrad Levinson coniò il termine «Guerrilla Marketing» per indicare una nuova forma di promozione che uscisse dai canali usuali e, usando mezzi semplici ed a basso costo, veicolasse un messaggio in modo creativo, diverso, inusuale, fuori contesto. Mutuo il termine e propongo dunque una nuova modalità didattica che mi piace chiamare **guerriglia matematica**; si tratta di portare la matematica fuori dalle aule in piccoli contesti inusuali dove far nascere un'idea di matematica diversa, riportare una tregua tra il comune sentire ed il mondo matematico.

Propongo quindi alcuni punti definenti la guerriglia matematica nella speranza che possano essere spunto di discussione (o di critica) e magari inducano qualcuno a seguire strade simili o parallele.

#### Microdiffusione

La guerriglia matematica non pretende di cambiare il mondo, propone un'azione dal basso di diffusione della cultura e dell'agire matematico su piccola scala; coinvolge poche persone alla volta che siano in qualche modo motivate. Lo scopo è di ridurre la paura della matematica ed alimentare la consapevolezza che sia una pratica accessibile e, perché no, interessante.

### **Spontaneità**

Le azioni di guerriglia matematica devono nascere spontaneamente, mai essere imposte o programmate. L'azione deve in qualche modo non essere prevedibile e deve basarsi, se possibile, sull'improvvisazione; non è una lezione o una conferenza, è artigianato. I partecipanti vanno coinvolti all'ultimo momento, con ogni mezzo, ma devono sentire l'improvvisa urgenza di partecipare, anche stravolgendo impegni già presi.

### **Rapidità**

L'azione deve essere rapida, una o due ore al massimo per consentire ai partecipanti di avere materiale gestibile e non essere sovraccaricati da idee e concetti. Durante un'azione di guerriglia matematica si possono lasciare in sospeso alcuni dettagli, alcuni passaggi, chiedere che poi i partecipanti completino in autonomia e successivamente il quadro preciso, dando magari solo le indicazioni generali. Questo non significa però essere sciatti o ambigui, chi pratica guerriglia matematica deve sapersi destreggiare tra l'eccesso di dettaglio e la generalità dei risultati.

### **Luoghi e tempi inusuali**

Le azioni di guerriglia matematica dovrebbero avvenire in contesti esterni al formale, fuori dall'aula e possibilmente fuori dalla scuola. L'ideale è un luogo pubblico, le persone non direttamente coinvolte devono domandarsi «cosa sta succedendo?». Bar, parchi, piazze, giardini, librerie, ogni luogo dove ci sia posto per sedersi e parlare con fogli ed una penna può essere teatro di un'azione di guerriglia matematica. Si può immaginare di usare invece un luogo usuale, tipo l'aula scolastica; l'azione deve allora essere imprevedibile in altro modo, magari temporale. Ad esempio si può interrompere il normale corso di una lezione per introdurre in pochi minuti un concetto matematico che non sia necessario o pertinente, ma sia interessante.

### **Precisione**

La guerriglia matematica deve essere informale e spiazzante, ma questo non significa che debba essere imprecisa o approssimativa. Chi compie azioni di guerriglia matematica deve avere la competenza per

farlo, assoluta padronanza della situazione, non si deve permettere la diffusione di errori o, peggio ancora, di falsità. La guerriglia matematica richiede impegno, serietà, precisione, chi la pratica deve esserne consapevole.

### **Economia**

L'azione di guerriglia matematica dovrebbe essere assolutamente gratuita (ci sono altri modi di fare soldi). Chi partecipa deve sentire l'importanza di un'idea alta della diffusione di cultura, deve percepire un'ideale che vada oltre una questione economica; per questo motivo la guerriglia matematica ha bisogno di molte persone perché il carico di lavoro possa essere gestibile su base volontaria (altrimenti diventa martirio, che è un'altra cosa). Piuttosto si può chiedere qualcosa in cambio a chi viene coinvolto da un'azione di guerriglia matematica: la dedizione assoluta per quel piccolo lasso temporale dell'azione, la diffusione ad altri di quel che si è capito (passa il favore), la decisione di abbracciare la causa e diventare promotore attivo di guerriglia matematica (se se ne ha la competenza, ovviamente).

### **Universalità**

Non è necessario che la guerriglia matematica sia solo strumento didattico per risolvere dubbi o paure, può essere anche veicolo per l'universalità del messaggio matematico. In questo senso potrebbe coinvolgere anche soggetti adulti, non solo studenti. Improvvisamente parlare in pubblico di matematica dovrebbe diventare evento curioso ed interessante, non solo bizzarro. E, soprattutto, dovrebbe poter coinvolgere tutti e tutte.

lunedì 30 aprile 2018 23:44

(Citata in [SaggiLettereBlogManifesti](#))

---

## MANIFESTO PER UN ALTRO INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

«Ho sognato che avevo disegnato dei tasti di pianoforte sul tavolo di cucina. Io ci suonavo sopra, erano muti. I vicini venivano ad ascoltare.»

— Tomas Tranströmer

*A Carla Quirina che mi aiuta ad ascoltare.*

Da quando insegno matematica a ragazzi e ragazze in età adolescenziale ho imparato a convivere con il dubbio. I versi di Tranströmer qui citati rappresentano in modo preciso il mio sentimento di insegnante; quando penso alla matematica posso distintamente udire una musica, a volte strutturata, a volte spontanea, ma è una musica silenziosa, bisogna imparare prima di tutto a sentirla, poi ad ascoltarla, infine a riprodurla. Ritengo che questa sia la sostanza del mio mestiere, separare le note dal rumore.

Ho deciso di mettere in forma scritta gli assunti, espliciti ed impliciti, della mia didattica; per i miei studenti e le mie studentesse, per le loro famiglie, per me. Questo manifesto, raccolta di intenti più che di pratiche, mi aiuta a fissare alcuni punti per me importanti, frutto di molte ore passate tra dubbi, ripensamenti, paure, convinzioni. Ovviamente non presenta soluzioni o ricette, sottolinea semmai un problema, reale o immaginato; propone una riflessione. Inoltre non vi è in questo documento alcuna pretesa di **completezza**, **originalità**, **efficacia** o **pertinenza**. Non vi è completezza in quanto è un lavoro in corso d'opera che forse non finirà mai di richiedere continue revisioni e ripensamenti. Non vi è originalità in quanto molte delle cose qui scritte sono sicuramente pratica comune di tanti colleghi e tante colleghe decisamente più capaci di me. Non vi è efficacia in quanto tutto il mio ripensare il mestiere di insegnante si riflette in una didattica che per ora ha un esito incerto. Non vi è pertinenza in quanto molte delle idee che esprimo in questo manifesto non sono specifiche della matematica, potrebbero essere declinabili in altre materie.

Parlo qui di matematica nella mia esperienza di docente di scuola secondaria di secondo grado; non più elementare, non il «saper far di

Questo manifesto, pubblicato nel 2018 sul mio blog, è stato la base per il mio libro [12].

conto», la matematica delle superiori non è necessaria alla maggior parte dei futuri cittadini e delle future cittadine. Se la si insegna, con passione, è perché passi il semplice messaggio che nella vita si possono fare anche cose non utili. La bellezza, in fondo, è una forma di necessità

Il manifesto si divide in sette punti espressi in modo incompleto e forzatamente sintetico da una parola. Ciascun punto viene poi specificato con alcuni dettagli nel testo.

## **Complessità**

Dire che la matematica è terreno difficile è dire cosa nota e scontata. La complessità è di forma, con un linguaggio codificato, arduo e non sempre utilizzato o capito come dovrebbe essere, e di sostanza, con argomenti astratti, raramente intuitivi, spesso presentati in forma apodittica e senza alcuna giustificazione. Di fronte a questo vasto territorio ogni commento come «è banale», «si vede», «non è possibile che non lo capiate», «questo è un errore gravissimo, nemmeno alle elementari» allontana l'autostima di ragazzi e ragazze e di conseguenza la propensione alla curiosità. Ci vuole tempo per affrontare le cose, tempo da dedicare ai dubbi, alle paure, ai non so fare. Non si può agganciare la didattica a quegli studenti e a quelle studentesse con un alto grado di motivazione e che sono quindi disponibili ad un livello di fatica sopra la norma. L'efficacia dell'insegnamento della matematica si misura con la capacità, o almeno la volontà, di far attraversare la tempesta a tutti e tutte, di coinvolgere, lasciare un segno che sia permanente. L'insegnante non deve essere un muro da scalare solo da chi ne ha la forza, ma un ponte che agevoli il passaggio di tutti, ognuno secondo propria propensione. Non è la banalità che tutti debbano essere promossi, è la necessità che nessuno sia lasciato da solo in un terreno tanto difficile. Il prezzo altrimenti è altissimo, la rassegnazione sociale (quando non diventa giustificazione o vanto) del «io di matematica non capivo nulla», bandiera di molti adulti.

## **Motivazione**

Senza motivazione non vi è possibilità di affrontare alcun percorso, figuriamoci uno difficile. Ci sono di mezzo speranze, aspettative, progetti personali, interessi. E una rete sociale di contatti (famiglia, amici, società) che spingono nella direzione del successo. Per un percorso matematico serio, però, la motivazione non può venire da una gratificazione sociale in termini di successo; studiare per il voto alto può funzionare solo per pochissimi casi, i più si perdono ai primi voti bassi. Bisogna che la motivazione venga costruita dal docente, la si deve cercare nella materia, per la materia, non al di fuori di

essa. Si devono cercare insieme sprazzi di bellezza, interesse culturale, lo stupore di fronte ad un panorama pressoché infinito. Si deve smettere soprattutto di considerare la matematica come una materia prettamente tecnica, la rincorsa verso una abilità. Un lavoro faticoso, necessario ancor di più di fronte a ragazzi e ragazze disinteressati. L'allontanamento da una disciplina difficile dove spesso la misura delle proprie attitudini si limita ad un voto è quasi scontato in età adolescenziale; se l'insegnamento si limita alla tecnica, non mostra spiragli di fantasia e di bellezza, la partita è persa in partenza per molti e molte. Spesso si fa appello al senso del dovere, «devi studiare anche se non ti piace»; ma il senso del dovere è un concetto astratto in età adolescenziale, lo si deve costruire, ci vuole anche in questo caso tempo e fatica (da parte di tutti). Un compito anche della scuola, necessario sicuramente, ma che richiede una forte motivazione. Si corre altrimenti il rischio che diventi obbedienza («fai così se no vieni bocciato») che, a differenza del senso del dovere, non è mai un valore, anzi, spesso è un ostacolo alla libertà e all'educazione. La persona obbediente tenderà a smettere di fare qualsiasi cosa in assenza di conseguenze negative, la persona con senso del dovere farà le cose perché è giusto farle, indipendentemente dalle conseguenze. Per sviluppare tutto questo dobbiamo dare qualcosa, un appiglio a cui aggrapparsi, non basta dire «studia questa cosa perché un domani ti sarà utile». L'orizzonte costituito da quel «un domani» è un orizzonte lontano anni luce nella mente di un adolescente. Bisogna continuamente, costantemente, faticosamente motivare. Non obbligare.

## **Pazienza**

Da parte di chi insegna, da parte di chi apprende. I risultati non possono essere immediati, la comprensione richiede tempo, quello che a noi sembra immediato ad un ragazzo o ad una ragazza può sembrare privo di senso. La pazienza richiede tempi lunghi, difficilmente si sposa con programmi standardizzati, con scadenze uguali per tutti, con livelli che non tengano conto della storia personale di ognuno. Spesso imputiamo le difficoltà alla poca voglia od al poco impegno dimenticando che l'interesse si costruisce nel tempo, con pazienza. Se una spiegazione non viene compresa deve esserci una selva di mani alzate, deve esserci il sorriso dell'insegnante, la possibilità di rispiegare, cambiando punto di attacco se necessario, cercando altre strade. Se una verifica va male la si deve analizzare, capire, rifare se necessario. Anche più volte. Corriamo dietro a programmi (che non ci sono più), indicazioni, libri di testo, test standardizzati, esami di fine ciclo. Tutto questo lascia poco tempo per esercitare la pazienza di aspettare chi ha il passo diverso dal nostro. Invece di lamentarci

che i nostri studenti e le nostre studentesse non studiano abbastanza, parliamo con loro per capire perché.

### **Affezione**

Non si può lasciare il segno (insegnare) senza provare vicinanza, rispetto, affetto. Anche in questo caso ci vuole tempo, bisogna conoscersi, bisogna dare peso alle persone e non ai numeri. Ogni singolo giorno, ogni singola ora in classe. L'insegnante deve preoccuparsi dei propri studenti e delle proprie studentesse, deve voler loro bene, deve tenerci. Non può essere indifferente, ci vuole affezione. Ragazzi e ragazze possono avvicinarsi solo se sentono di contare davvero qualcosa, altrimenti ricadono nel ruolo di fruitori di un servizio, si sentono uno dei tanti elementi (tra i più fastidiosi) di un lavoro e non il punto centrale del mestiere di insegnante. Anche loro devono affezionarsi a chi insegna per avvicinarsi alla materia. Non significa diventare amici, ruolo e differenza di età non lo consentono: significa che per insegnare una materia così difficile ci vuole uno sforzo che solo l'affezione a volte può giustificare. L'imparzialità non ha nulla a che vedere con l'indifferenza, prima risolveremo questo malinteso e meglio sarà.

### **Fiducia**

Studenti e studentesse devono avere fiducia in chi cerca di parlare loro di matematica, fiducia nel sapere che non sono soli, che le difficoltà si possono affrontare, che si può anche sbagliare. Chi insegna matematica deve essere punto di riferimento, deve ascoltare tutte le domande, farsi carico dei problemi, evitare di sottostimare, sminuire. Frasi come «non sei portato» o «è banale, pensaci per conto tuo» sono abissi da cui non si torna indietro. L'insegnante deve camminare sullo stesso terreno dei suoi studenti e delle sue studentesse, può sbagliare ed ammettere di aver sbagliato, può pronunciare la frase «non lo so» e poi documentarsi, può mantenere la parola data, può fare di tutto per non lasciare nulla di intentato. Deve, in altre parole, essere degno o degna di fiducia.

### **Valutazione**

Misurare è facilissimo, valutare meno. Non dobbiamo o possiamo fermarci alla misura, la valutazione richiede un'assunzione di responsabilità ed una libertà che devono andare molto oltre la verifica. L'imparzialità, l'obiettività, la standardizzazione dei voti vanno nella direzione di rendere tutto il processo valutativo automatico; può andar bene per i diligenti, ma spesso diventa un tritacarne senza ritorno. Non si tratta di inventare voti o di ridurre tutto ad un fatto di simpatia, si tratta di mettere in atto la propria professionalità e riven-

dicare, insieme alla libertà di insegnamento, anche la libertà di valutazione. Laddove c'è fiducia nessuno si sentirà prevaricato, laddove c'è dialogo e condivisione di intenti non può che esserci una valutazione serena che sia, prima di tutto, propedeutica all'insegnamento. I compiti, le interrogazioni, i voti non sono il fine della scuola, sono un mezzo per migliorare il più possibile il dialogo educativo. E siccome il dialogo è fatto a più voci, se no è un monologo, le misurazioni sono da distribuire e condividere tra chi insegna e chi impara. Altra cosa è la valutazione, che tiene conto di molti fattori, anche non misurabili. Togliamo i voti dal loro attuale piedistallo, rendiamoli utili e non determinanti, costruiamo una didattica centrata sulla conoscenza e non sulla misurazione, riportiamo le ansie di ragazzi e ragazze (e delle loro famiglie) ad un livello tollerabile e centrate su temi importanti, non su un numero in una casella a fine anno. Questo non significa non dare importanza ai voti, il contrario. Il mio fine ultimo non è far sì che i miei studenti e le mie studentesse prendano dieci, il mio fine ultimo è trasmettere loro il gusto di fare matematica. Se riesco in questo i voti arriveranno da soli.

## **Poesia**

La matematica serve a costruire ponti e a molte altre cose, ma non è per questo che la insegniamo, non per questo ne proponiamo lo studio. Certo, le applicazioni della matematica possono essere importanti, motivanti, a volte anche belle, ma il vero motivo che dovrebbe spingerci da educatori è un altro: la sua bellezza. Molti studenti e molte studentesse rimangono indifferenti, se non ostili, perché non mostriamo loro l'aspetto umano, poetico, estetico della matematica. Apro un libro a caso e trovo esercizi su esercizi di puro calcolo, adatti sicuramente a formare la tecnica (necessaria), ma avviliti da un punto di vista umano quando costituiscono l'unico orizzonte mostrato. Dobbiamo portare quotidianamente lo stupore nell'insegnamento della matematica, la meraviglia ed il senso di straordinaria prospettiva che l'edificio matematico offre. Vengono in mente le parole di Borges sulla musica, «misteriosa forma del tempo». In mezzo a tutti i calcoli, a tutte le «competenze» della scuola moderna, ai tecnicismi, alle abilità da cittadino modello, in mezzo a tutto l'arido deserto che spesso allontana le giovani menti nel momento in cui più sarebbero avvicinabili, in mezzo a tutto questo proviamo a far ascoltare la melodia muta, inutile e, per questo, meravigliosa della matematica.

Riporto un risultato interessante dovuto a Hamilton che riguarda le orbite di un corpo soggetto a un potenziale gravitazionale nello spazio delle velocità.

È noto (prima legge di Keplero) che le orbite chiuse seguite da un pianeta intorno al sole sono ellissi dove il sole occupa un fuoco  $F$  (trascuriamo per semplicità il moto del Sole), come in figura.

Scrivendo la seconda legge della dinamica ed usando la forza di attrazione gravitazionale newtoniana otteniamo

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

dove, ricordo, il punto indica la derivata rispetto al tempo,  $m$  è la massa del pianeta (che si semplifica),  $M$  la massa del sole ed il simbolo  $\hat{\mathbf{r}}$  indica il versore radiale, ovvero il vettore di lunghezza unitaria che parte dal centro verso il punto considerato (il segno meno è dovuto alla natura attrattiva della gravità). Usando le componenti  $x$  ed  $y$  possiamo scrivere

$$\dot{v}_x = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta$$

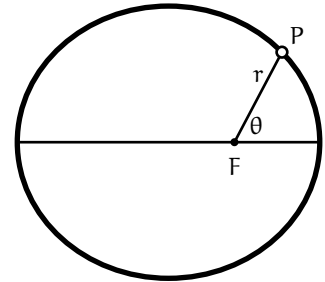
$$\dot{v}_y = -\frac{GM}{r^2} \sin \theta$$

A questo punto moltiplichiamo al secondo membro sia il numeratore che il denominatore per  $\dot{\theta}$  ottenendo

$$\dot{v}_x = -\frac{GM}{\dot{\theta}r^2} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{v}_y = -\frac{GM}{\dot{\theta}r^2} \dot{\theta} \sin \theta$$

Il termine  $r^2\dot{\theta}$  è costante; si tratta infatti del momento angolare rispetto a  $F$  diviso la massa  $m$ , momento angolare che si conserva perché la forza è sempre radiale. Vedendolo da un altro punto di vista è facile dimostrare che questo termine è proporzionale alla velocità areolare del pianeta, velocità che per la nota seconda legge di Keplero è costante (esercizio per casa).



Chiamando dunque  $r^2\dot{\theta} = l$  con  $l$  costante e ricordando le proprietà di derivazione di seno e coseno, riscriviamo le equazioni del moto in questa forma

$$\dot{v}_x = -\frac{GM}{l} \sin \theta$$

$$\dot{v}_y = \frac{GM}{l} \cos \theta$$

Portiamo a sinistra e ricordando che la somma delle derivate è la derivata della somma (linearità della derivazione) otteniamo

$$\frac{d}{dt} \left( v_x + \frac{GM}{l} \sin \theta \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( v_y - \frac{GM}{l} \cos \theta \right) = 0$$

e dunque, ricordando che una funzione a derivata nulla è uguale ad una costante, otteniamo

$$v_x + \frac{GM}{l} \sin \theta = k_x$$

$$v_y - \frac{GM}{l} \cos \theta = k_y$$

con  $k_x$  e  $k_y$  costanti. Ultimo sforzo, con semplice passaggio otteniamo

$$v_x - k_x = -\frac{GM}{l} \sin \theta$$

$$v_y - k_y = \frac{GM}{l} \cos \theta$$

Eleviamo al quadrato e sommiamo, ottenendo (ricordando la relazione fondamentale della goniometria)

$$(v_x - k_x)^2 + (v_y - k_y)^2 = \left( \frac{GM}{l} \right)^2$$

Ed ecco il risultato interessante di cui parlavo all'inizio: nello spazio delle velocità  $(v_x, v_y)$  l'orbita è una **circonferenza**, qualunque sia la forma dell'ellisse nello spazio  $(x, y)$ . La circonferenza ha centro in  $(k_x, k_y)$  e raggio pari a  $\frac{GM}{l}$ . Questo risultato (ottenuto a fine ottocento da Hamilton per la prima volta) si applica ovviamente non solo ad un pianeta intorno al sole, ma a qualsiasi moto soggetto ad una forza gravitazionale newtoniana. La forma dell'orbita nello spazio delle velocità prende il nome di **odografo**; abbiamo appena dimostrato che

l'odografo per le orbite newtoniane dei pianeti è una circonferenza.  
Alcuni esercizi:

1. dimostrare che, nelle condizioni qui proposte,  $k_x = 0$  e  $k_y$  è pari al raggio della circonferenza moltiplicato per l'eccentricità dell'orbita;
2. cosa succede se l'orbita non è chiusa, ovvero è una parabola o un'iperbole? Con minimo sforzo è possibile verificare che anche in questo caso nello spazio delle velocità la traiettoria è una circonferenza (o meglio un arco di circonferenza).

---

## <TavoloLavoro>

sabato 1 gennaio 2000 00:00

(Citata in [CampoBase](#))

---

Uso questa nota come tavolo da lavoro.

La data di questa nota è fittizia essendo una parte dello scaffale che si aggiorna spesso.

- Note da scrivere
  - Scrivere alcune note per descrivere la struttura e le motivazioni dello Scaffale.
    - Ho iniziato, a caso, con [q2x9](#) sugli attriti che questo sistema cerca di risolvere (sistemare e coordinare con le altre note che descrivono lo scaffale; vedi dopo)
  - Cerchio piccolo che ruota dentro cerchio grande, vedi [13]. Una bozza del disegno con Cetz è in [stdm](#). Messo come esercizio in [SentieriEstivi2026-2D](#)
    - Collegamento con ellissi di Zulkowski
    - Collegamento con scala che scivola
    - Inviluppo di curve e caustiche
  - Problema 2 in [14]; Alice in un riferimento ruotante e Bob fermo, le loro velocità. Interessante per discutere di sistemi non inerziali.
  - Albero binario di interi e suoi collegamenti con lo sviluppo di un numero in base binaria, ho messo come esercizio in [SentieriEstivi2026-1G](#)
  - Scrivere SentieriEstivi2026-4L
- Note da importare
  - Tutte le note (circa 200) nel mio vecchio Scaffale
    - Rivedere bene tutte le note in [SuggerzioniVisuali](#). In particolare i disegni.
    - Rivedere i [ProblemiDellaSettimana](#).
    - Rivedere in generale i link, gli hub e la coerenza delle note importate fino ad ora.
  - Tutte le note (circa 200, ma sovrapposte alle precedenti) nel mio vecchio Obsidian.
  - Tutte le note dei quaderni degli ultimi trent'anni (non so quantificare il numero).
- Cose da decidere
  - Le note compaiono in ordine casuale, di data crescente o decrescente? Per comodità sarebbe meglio le note più recenti in fondo, aiuterebbe nell'inserimento di nuove note. Però quando si apre un documento di solito ci si aspettano le novità in cima. Mumble.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. L. Borges, *Finzioni*. Einaudi, 2007.
- [2] A. A. Kirillov, *A tale of two fractals*, 2013<sup>o</sup> ed. Secaucus, NJ: Birkhauser Boston, 2013.
- [3] V. Arnold, *Mathematical Understanding of Nature: Essays on Amazing Physical Phenomena and Their Understanding by Mathematicians*. AMS, American Mathematical Society, 2014. [Online]. Disponibile su: <https://books.google.it/books?id=9INzBAAQBAJ>
- [4] T. Needham, *Visual Complex Analysis*. London, England: Oxford University Press, 1998.
- [5] P. Gnädig, *200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions*. 2001.
- [6] I. M. Gelfand e A. Shen, *Algebra*, 1<sup>o</sup> ed. Secaucus, NJ: Birkhauser Boston, 2003.
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne, e J. A. Wheeler, *Gravitation*. New York: W.H. Freeman, Company, 1973.
- [8] R. B. Nelsen, «Golden Tiles and Arctangent Identities», *Mathematics Magazine*, vol. 95, fasc. 5, pp. 569–570, 2022, doi: [10.1080/0025570X.2022.2125732](https://doi.org/10.1080/0025570X.2022.2125732).
- [9] N. Calkin e H. S. Wilf, «Recounting the Rationals», *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, fasc. 4, pp. 360–363, 2000, doi: [10.1080/00029890.2000.12005205](https://doi.org/10.1080/00029890.2000.12005205).
- [10] E. Cassirer, R. Klibansky, e H. Paton, *Philosophy & History: Essays Presented to Ernst Cassirer*. in (Harper Torchbooks). Harper & Row, 1963.
- [11] M. Aigner e G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*. Springer, 2004.
- [12] R. Giannitrapani, *Un labirinto incerto. Appunti per una poetica della matematica*. Milano: Mondadori, 2019.
- [13] N. B. Vasilyev e V. L. Gutenmacher, *Straight Lines and Curves*, Revised. Moscow: Mir Publishers, 1980.
- [14] P. Gnädig, G. Honyek, e M. Vigh, *200 More Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions*. Cambridge University Press, 2016. [Online]. Disponibile su: <https://www.cambridge.org/core/books/200-more-puzzling-physics-problems/B4DC45F5A40D4B792653B407975F3A41>